# Тест по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика.” Июнь 2007 г.

1. **Основные понятия теории вероятностей.**

   1.1 Упростить выражение $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

   1.2 Пусть $A$ и $B$ — два события. Найти выражение для множества тех исходов, при которых происходит а) ровно одно; б) хотя бы одно из событий $A$ и $B$.

   1.3 Совместны ли события $A$ и $\overline{A \cup B}$?

   1.4 Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств пространства элементарных исходов $\Omega$ называется алгеброй подмножеств?

   1.5 Дополните множество $\mathcal{F} = \Big\{\Omega, \{1,2,3\}, \{4\}\Big\}$ одним подмножеством так, чтобы оно стало алгеброй подмножеств пространства $\Omega = \{1,2,3,4\}$?

   1.6 Пусть $A, B, C$ – три произвольных события. Записать событие, заключающееся в том, что а) произошли все три события одновременно; б) произошло хотя бы одно из этих событий.

   1.7 Каким условиям должны удовлетворять события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы они образовали полную группу попарно несовместных событий?

   1.8 Пусть а) $A_n \subset A_{n+1}$; б) $A_n \supset A_{n+1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$?

   1.9 Пусть $\mathcal{F}$ — алгебра подмножеств $\Omega$. Какое дополнительное условие надо наложить на $\mathcal{F}$ для того, чтобы $\mathcal{F}$ стала **сигма**-алгеброй?

   1.10 Какое свойство вероятности называется **сигма**-аддитивностью?

   1.11 При каком условии на события $A$ и $B$ имеет место равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

   1.12 Известно, что наступление события $A$ влечет наступление события $B$. Поставить знак неравенства между $P(A)$ и $P(B)$.

   1.13 Что такое а) попарная независимость; б) независимость в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

   1.14 Пусть $0 < P(A), P(B) < 1$ и события $A, B$ независимы. Могут ли они быть несовместны?

   1.15 Известно, что $A$ и $B$ — независимые события. Верно ли, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы?

   1.16 Как определяется вероятность того, что произойдет событие $A$, при условии, что произошло событие $B$.

   1.17 Пусть события $A$ и $B$ являются независимыми, $P(B) \neq 0$. Чему равна $P(A|B)$?

   1.18 Написать формулу полной вероятности.

   1.19 Написать формулу Байеса.

   1.20 Пусть все упомянутые далее условные вероятности существуют. Всегда ли при этом условии верно следующее равенство: $P(\overline{A}\,|B) = 1 - P(A|B)$?

   1.21 Проведено $n$ независимых испытаний Бернулли, $p$ — вероятность единичного успеха. Чему равна вероятность того, что произошло **а) ровно $k$ успехов; б) не менее $k$ успехов**?

   1.22 Проведено $n$ независимых испытаний Бернулли, $p$ — вероятность единичного успеха. Чему равна вероятность того, что а) сначала было $k$ успехов, а потом $n-k$ неудач; б) произошло ровно $k$ успехов, причем два первых испытания закончились успехами?

   1.23 При каких условиях имеет место сходимость $C_n^k p^k q^{n-k} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$?

2. **Теория случайных величин.**

2.1 Какая функция $\xi(\cdot)$, заданная на пространстве элементарных исходов $\Omega$, называется случайной величиной?

2.2 Что такое функция распределения случайной величины $\xi$?

2.3 Пусть $F_k$ – функция распределения случайной величины $\xi_k$, $k = 1, 2$. Какое из утверждений верно:
(А) $F_1(x) \equiv F_2(x)$ влечет $P(\xi_1 = \xi_2) = 1$, (Б) $P(\xi_1 = \xi_2) = 1$ влечет $F_1(x) \equiv F_2(x)$, (В) неверно ни А, ни Б.

2.4 Пусть $F(\cdot)$ есть функция распределения случайной величины $\xi$. Выразить через значения $F(\cdot)$ следующие вероятности: $P(\xi = x); P(\xi > x)$

2.5 Пусть $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. В каких случаях функция $F(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ может быть функцией распределения:
(А) $F(x) = x^2$, (Б) $F(x) = 1 - x$, (В) $F(x) = 1 - e^{-x}$, (Г) ни в одном из случаев А,Б,В).

2.6 Известно, что $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$ и при $x \in (0, 1)$ функция распределения случайной величины $\xi$ имеет следующий вид: $F(x) = (x^2 + 1)/4$. Чему равны $F(0)$ и $F(1)$?

2.7 Какие из указанных далее функций $p(\cdot)$ могут быть плотностью распределения (вне указанного интервала $p(x) = 0$):
(А) $p(x) = 1/x^2$, $x > 1$, (Б) $p(x)$ – периодическая функция, (В) $p(x) = 3 - 4x$, $0 < x < 1$, г) ни в одном из случаев (А),(Б),(В).

2.8 Пусть $p(x)$ – плотность распределения случайной величины $\xi$. Чему равна $F(x)$ – функция распределения $\xi$?

2.9 Пусть $p(x)$, $-\infty < x < +\infty$, есть плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины $\xi$. Чему равна $P(a < \xi < b), P(\xi \leqslant a)$?

2.10 Пусть $\xi$ — дискретная случайная величина и задано ее распределение: $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$ .При каком условии существует и чему равно $M\xi$?

2.11 Пусть $\xi$ — абсолютно непрерывная случайная величина, $p(x)$ — плотность ее распределения. При каком условии существует и чему равно $M\xi$?

2.12 Пусть случайная величина $\xi$ распределена а) дискретно; б) абсолютно непрерывно. Чему равно $Me^{\xi}$?

2.13 Пусть существуют $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$; Выберите **все** верные утверждения: равенство $M(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = M\xi_1 + \cdots + M\xi_n$ имеет место (А) для любых таких случайных величин, (Б) для независимых в совокупности случайных величин, (В) если $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$.

2.14 Пусть существуют $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$. Выберите **все** верные утверждения: равенство $M(\xi_1 \ldots \xi_n) = M\xi_1 \ldots M\xi_n$ имеет место (А) для независимых в совокупности случайных величин, (Б) для независимых попарно случайных величин, (В) если $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$.

2.15 Что такое дисперсия случайной величины $\xi$?

2.16 Пусть существует $D\xi = \sigma^2 < \infty$. Чему равна $D(2 - 3\xi)$?

2.17 Пусть $D\xi_i$ существуют. Выберите **все** верные утверждения:равенство $D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_n$ имеет место (А) для любых таких случайных величин, (Б) для независимых в совокупности случайных величин, (В) если $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$.

2.18 Что такое коэффициент корреляции случайных величин $\xi, \eta 2$ и какие значения он может принимать?

2.19 Что такое совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$?

2.20 При каком условии случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ а) независимы в совокупности; б) попарно ?

2.21 Пусть $p_{\xi,\eta}(x,y)$ — совместная плотность распределения случайных величин $\xi, \eta$. Как найти плотность $p_\xi(x)$ распределения случайной величины $\xi$?

2.22 Пусть $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ — плотность распределения случайной величины $\xi$. Найти численные значения $M\xi, D\xi$, не вычисляя интегралов.

2.23 Чему равно математическое ожидание случайной величины равномерно распределенной в интервале $(-1,1)$?

2.24 Пусть случайная величина $\xi$ распределена а) дискретно; б) абсолютно непрерывно. Чему равна характеристическая функция этой случайной величины?

2.25 Записать неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.

2.26 Что такое сходимость по вероятности последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине $\xi$?

2.27 Что такое сходимость по распределению последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине $\xi$?

2.28 Что такое среднеквадратичная сходимость последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине $\xi$?

2.29 К чему сходится при $n \to \infty$ последовательность случайных величин $\eta_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ , если $\xi_k$ одинаково распределены, независимы, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$?

2.30 Как распределена случайная величина $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ , если $\xi_k$ независимы в совокупности, одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$?

2.31 Какой тип сходимости при $n \to \infty$ свойственен последовательности $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, если $\xi_k$ независимы в совокупности, одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$?

2.32 Пусть $\xi$ —число успехов в $n$ независимых испытаниях Бернулли, $p = 1/2$ – вероятность успеха. Чему приближенно равна $P(k_1 < \xi < k_2)$ при больших $n$?

3. **Цепи Маркова и случайные процессы.**

3.1 Пусть случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ принимают значения из множества $X = \{x_1, \dots, x_s\}$. При каком условии эти случайные величины образуют цепь Маркова?

3.2 Пусть случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ принимают значения из множества $X = \{x_1, \dots, x_s\}$ и образуют конечную однородную цепь Маркова. Как определяется $\pi_{ij}^{(k)}$ – вероятность перехода за $k$ шагов из $i$-го состояния в $j$-ое состояние?

3.3 Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ образуют конечную однородную цепь Маркова, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ – матрица перехода за один шаг, $P(\xi_1 = 1) = 1/3$,$P(\xi_1 = 2) = 2/3$ – начальное распределение. Найти распределение на втором шаге (распределение случайной величины $\xi_2$).

3.4 Написать общий вид матрицы переходных вероятностей в случае независимости состояний конечной однородной цепи Маркова с $s$ состояниями.

3.5 Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ – матрица перехода за один шаг в конечной однородной цепи Маркова. Возможен ли переход за один шаг из $i$-го состояние в $j$-ое, если $i = 1, j = 2$?

3.6 Пусть заданы $\pi^{(k)}$ матрицы перехода за $k$ шагов в конечной однородной цепи Маркова при $k = 2, 3$. Как найти матрицу перехода за 7 шагов?

3.7 Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс. Что такое двумерная функция распределения данного случайного процесса?

3.8 Пусть $\xi(t) = \nu + t$, где $t > 0$, $\nu$ – случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[0, 1]$. Чему равно математическое ожидание данного случайного процесса?

3.9 Пусть $\xi(t) = t\nu$, где $t > 0$, $\nu$ – случайная величина, распределенная нормально по закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Чему равна дисперсия данного случайного процесса?

3.10 Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс с **действительными** значениями. Что такое корреляционная функция данного случайного процесса?

3.11 Пусть $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ — комплексный случайный процесс, $K(t, s)$ — его корреляционная функция. Всегда ли можно утверждать, что $K(t, s) \equiv K(s, t)$?

3.12 Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс, $K(t, s)$ — его корреляционная функция. Всегда ли верно, что $K(t, t) \geqslant 0$?

3.13 Какой случайный процесс $\xi(t)$ называется процессом с независимыми приращениями?

3.14 Пусть $\xi(t)$ – процесс Пуассона, начинающийся в нуле. Как распределено сечение $\xi(t)$ случайного процесса в фиксированный момент времени $t = t_0$?

4. **Основы математической статистики.**

4.1 Пусть случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Найти значения констант $a$ и $b$ таких, что $a(\xi - b)$ имеет стандартное нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

4.2 Пусть координаты $\xi_1, \dots, \xi_n$ случайного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ независимы и распределены по стандартному нормальному закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Как распределено скалярное произведение $(\xi, a)$, если вектор $a$ имеет в некотором базисе координаты $(1, \dots, 1)$?

4.3 Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Какая функция от $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеет распределение $\chi^2_n$ (Пирсона) с $n$ степенями свободы?

4.4 Пусть $\xi = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ – случайный вектор с независимыми стандартно нормально распределенными координатами, $e \in \mathbb{R}^n$ – фиксированный вектор с единичной нормой, $\Pi_e$ – ортогональный проектор на направление, заданное вектором $e$. Как распределены следующие случайные величины: $(\xi, e)$; $(\xi, e)^2$; $\|(I - \Pi_e)\xi\|^2$; $\|\Pi_e \xi\|^2$; $\frac{(\xi, e)}{\sqrt{n-1}\|(I-\Pi_e)\xi\|}$?

4.5 Получена $n$-мерная выборка из распределения с плотностью $p(x) = \theta e^{-\theta x},\ x > 0$ ($n$ реализаций независимых одинаково распределенных случайных величин). Как выглядит функция правдоподобия данной выборки?

4.6 Пусть $\Big(t_1(\xi), t_2(\xi)\Big)$ — интервальная оценка параметра $\theta$. Что такое уровень доверия оценки?

4.7 Когда длина интервальной оценки $\mu$ в нормальном распределении меньше: когда значение $\sigma^2 = 1$ известно априори или когда используется выборочная дисперсия $\hat{\sigma}^2 = 1$ (при фиксированных выборке и уровне доверия)?

4.8 Дана выборка объема $n$ из нормального распределения с неизвестными $\mu, \sigma^2$. Когда длина интервальной оценки $\mu$ больше: при $n = 100$ или $n = 200$ (при фиксированных значениях выборочных среднего $\hat{\mu}$ и дисперсии $\hat{\sigma}^2$ и уровне доверия $\gamma$)?

4.9 Пусть статистика $t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ является точечной оценкой значения функции $\tau(\theta)$. Что такое несмещенность оценки?

4.10 Пусть статистика $t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ является точечной оценкой значения функции $\tau(\theta)$. Что такое состоятельность оценки?

4.11 Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – выборка из распределения с неизвестной дисперсией, $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

Будет ли $s^2(\xi) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \overline{\xi})^2$ несмещенной оценкой дисперсии?

4.12 Пусть $t(\xi)$ — несмещенная оценка значения параметра $\theta$ распределения $\xi$. Всегда ли верно, что $t^2(\xi)$ — несмещенная оценка значения функции $\theta^2$?

4.13 Пусть $t_1(\xi), t_2(\xi)$ — несмещенные оценки значения параметра $\theta$ с минимальной дисперсией. Какие из утверждений верны:

(А) $t_1(\xi) = t_2(\xi)$ для любых значений $\xi$, (Б) $P_\theta\Big(t_1(\xi) = t_2(\xi)\Big) = 1$, (В) верны и А, и Б, (Г) неверно ни А, ни Б?

4.14 Пусть $t_1(\xi)$ — эффективная оценка значения параметра $\mu$ нормального распределения, $t_2(\xi)$ — несмещенная оценка, не обладающая свойством эффективности. Сравнить по величине дисперсии $Dt_1(\xi)$ и $Dt_2(\xi)$ этих оценок.

4.15 Пусть $L(x, \theta)$ — функция правдоподобия. Какая оценка $\hat{\theta}(\xi)$ называется оценкой максимального правдоподобия?