Тест по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика.” Июнь 2004 г.

1. **Основные понятия теории вероятностей.**

1.1 Упростить выражение $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

1.2 Пусть A и B — два события. Найти выражение для множества тех исходов, при которых происходит ровно одно из событий A и B.

1.3 Совместны ли события A и $\overline{A \cup B}$?

1.4 Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств пространства элементарных исходов Ω называется алгеброй подмножеств?

1.5 Каким подмножеством достаточно дополнить множество $\mathcal{F} = \Big\{\Omega, \{1,2,3\}, \{4\}\Big\}$ для того, чтобы оно стало алгеброй подмножеств $\Omega = \{1,2,3,4\}$?

1.6 Верно ли, что для любой алгебры подмножеств Ω подмножества $\emptyset, \Omega$ принадлежат этой алгебре?

1.7 Может ли полная группа событий, отличная от $\{\emptyset, \Omega\}$, являться алгеброй подмножеств Ω?

1.8 Каким множеством достаточно дополнить пару A, B несовместных событий, чтобы получилась полная группа событий?

1.9 Пусть $\mathcal{F}$ — алгебра подмножеств Ω. Какое дополнительное условие надо наложить на $\mathcal{F}$ для того, чтобы $\mathcal{F}$ стала сигма-алгеброй?

1.10 Какое свойство вероятности называется сигма-аддитивностью?

1.11 При каком условии на события A и B имеет место равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

1.12 Известно, что наступление события A влечет наступление события B. Поставить знак неравенства между $P(A)$ и $P(B)$.

1.13 Всегда ли верно, что $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$?

1.14 Что такое независимость событий A и B?

1.15 Пусть события A и B являются независимыми и несовместными. Найти $\min\Big(P(A), P(B)\Big)$.

1.16 Следует ли из независимости событий в совокупности их попарная независимость?

1.17 Следует ли из попарной независимости событий их независимость в совокупности?

1.18 Известно, что A и B — независимые события. Верно ли, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы?

1.19 Написать формулу вероятности того, что произойдет событие A, при условии, что произошло событие B.

1.20 Пусть события A и B являются независимыми. Чему равна $P(A|B)$?

1.21 Написать формулу полной вероятности.

1.22 Написать формулу Байеса.

1.23 Проведено n независимых испытаний Бернулли, вероятность успеха в единичном испытании равна p. Чему равна вероятность того, что произошло ровно k успехов?

1.24 При каких условиях имеет место сходимость $C_n^k p^k q^{n-k} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$?

2. **Теория случайных величин.**

2.1 Какая функция $\xi(\cdot)$, заданная на пространстве элементарных исходов Ω, называется случайной величиной?

2.2 Что такое функция распределения случайной величины ξ?

2.3 Могут ли две различные случайные величины иметь одинаковые функции распределения?

2.4 Пусть $F(\cdot)$ есть функция распределения случайной величины ξ. Выразить через $F(x)$ следующие вероятности: $P(\xi = x), P(\xi > x)$.

2.5 Какое свойство функции $F(x) = P(\xi < x)$ называется непрерывностью слева?

2.6 Пусть функция распределения имеет вид $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ x/2, & \text{если} \quad 0 < x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$ Известно, что $F(1) = a$. Найти a.

2.7 Известно,что при $x \in (0,1)$ функция распределения имеет вид $F(x) = x^2$. Чему равна $F(x)$ при $x < 0$?

2.8 Пусть $p(x)$ есть плотность распределения случайной величины ξ. Может ли для некоторого x_0 иметь место равенство $\lim\limits_{x \to x_0} p(x) = \infty$?

2.9 Пусть $p(x)$ есть плотность распределения случайной величины ξ. Чему равна $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ?

2.10 Пусть $p(x),\ -\infty < x < +\infty$, есть плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Чему равна $P(a < \xi < b)$?

2.11 Пусть ξ — дискретная случайная величина, и заданы $P(\xi = x_k) = p_k,\ k = 1, 2, \ldots$ Чему равно $M\xi$?

2.12 Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, $p(x)$ — плотность ее распределения. Чему равно $M\xi$?

2.13 Может ли случайная величина не иметь математического ожидания?

2.14 Может ли случайная величина не иметь дисперсии?

2.15 Известно, что $M\xi = D\xi = 0$. Может ли ξ принимать ненулевые значения?

2.16 Пусть существует $M\xi = a < \infty$. Чему равно $M(2\xi + 3)$?

2.17 Пусть существуют $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$. Всегда ли верно, что $M(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = M\xi_1 + \ldots + M\xi_n$?

2.18 Пусть существует $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$. При каких условиях верно равенство $M(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = M\xi_1 \cdot \ldots \cdot M\xi_n$?

2.19 Что такое дисперсия случайной величины ξ?

2.20 Пусть существует $D\xi = \sigma^2 < \infty$. Чему равна $D(3\xi + 2)$?

2.21 Всегда ли дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий (известно, что дисперсии существуют)?

2.22 Что такое ковариация случайных величин ξ_1, ξ_2?

2.23 Что такое совместная функция распределения случайных величин ξ_1, ξ_2?

2.24 Какой вид имеет $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — в случае их независимости в совокупности?

2.25 Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность распределения случайных величин ξ, η. Как найти плотность $p_\xi(x)$ распределения случайной величины ξ?

2.26 Пусть $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ — плотность распределения случайной величины ξ. Найти численные значения $M\xi, D\xi$, не вычисляя интегралов.

2.27 Чему равно математическое ожидание случайной величины равномерно распределенной в интервале $(-1, 1)$?

2.28 Что такое характеристическая функция случайной величины ξ?

2.29 Записать неравенство Чебышева.

2.30 Записать неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.

2.31 Что такое сходимость по вероятности последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине ξ?

2.32 Что такое сходимость по распределению последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине ξ?

2.33 Что такое сходимость в среднем квадратичном последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине ξ?

2.34 К чему сходится при $n \to \infty$ последовательность случайных величин $\eta_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ в законе больших чисел?

2.35 Как распределена случайная величина, к которой сходится при $n \to \infty$ последовательность случайных величин $\eta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ в условиях центральной предельной теоремы?

3. **Цепи Маркова и случайные процессы.**

3.1 Чему равна сумма элементов строки матрицы переходных вероятностей для конечных однородных цепей Маркова в случае матрицы перехода за один шаг?

3.2 Чему равна сумма элементов строки матрицы переходных вероятностей для конечных однородных цепей Маркова в случае матрицы перехода за k шагов?

3.3 Что можно сказать о строках матрицы переходных вероятностей в случае независимости состояний цепи Маркова?

3.4 Пусть $\begin{pmatrix} 1/2 & a \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ — матрица перехода за один шаг в цепи Маркова. Найти значение a.

3.5 Может ли $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ быть матрицей перехода в цепи Маркова?

3.6 Каким равенством в теории цепей Маркова связаны матрица перехода π_1 за один шаг и матрица перехода π_k за k шагов?

3.7 Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс. Что такое двумерная функция распределения данного случайного процесса?

3.8 Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс. Что такое корреляционная функция данного случайного процесса?

3.9 Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс, $K(t,s)$ — его корреляционная функция. Всегда ли верно, что $K(t,s) = K(s,t)$?

3.10 Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс, $K(t,s)$ — его корреляционная функция. Всегда ли верно, что $K(t,t) \geq 0$?

3.11 Какой случайный процесс является математической моделью броуновского движения?

3.12 Какой случайный процесс является математической моделью радиоактивного распада?

3.13 Что такое непрерывность в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$?

3.14 Что такое дифференцируемость в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$?

3.15 Что такое интегрируемость по Риману в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$?

3.16 Какой случайный процесс $\xi(t)$ называется процессом с независимыми приращениями?

4. **Основы математической статистики.**

4.1 Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2. Найти значения констант a и b таких, что $a(\xi - b)$ имеет стандартное нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

4.2 Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Какая функция от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеет распределение χ_n^2 (Пирсона) с n степенями свободы?

4.3 Является ли $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрицей оператора ортогонального проектирования в трехмерном евклидовом пространстве?

4.4 Пусть координаты случайного вектора одинаково нормально распределены и независимы в некотором ортонормированном базисе. Могут ли они оказаться зависимыми в другом ортонормированном базисе?

4.5 Может ли функция правдоподобия принимать отрицательные значения?

4.6 Пусть $\Big(t_1(\xi), t_2(\xi)\Big)$ — интервальная оценка параметра θ. Что такое уровень доверия оценки?

4.7 Рассматривается интервальная оценка μ в нормальном распределении. Когда длина доверительного интервала меньше — при известной или неизвестной дисперсии (при постоянных объеме выборки и уровне доверия)?

4.8 Рассматривается интервальная оценка μ в нормальном распределении. Когда длина доверительного интервала меньше — при большем или меньшем объеме выборки (при одном и том же уровне доверия)?

4.9 Пусть статистика $t(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является точечной оценкой значения функции $\tau(\theta)$. Что такое несмещенность оценки?

4.10 Пусть статистика $t(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является точечной оценкой значения функции $\tau(\theta)$. Что такое состоятельность оценки?

4.11 Пусть ξ_1, ξ_2 —независимые случайные величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Является ли статистика $t(\xi) = \dfrac{1}{3}\xi_1 + \dfrac{2}{3}\xi_2$ несмещенной оценкой μ?

4.12 Пусть $t(\xi)$ — несмещенная оценка параметра θ распределения ξ. Верно ли, что $at(\xi) + b$ — несмещенная оценка значения функции $\tau(\theta) = a\theta + b$?

4.13 Пусть $t(\xi)$ — несмещенная оценка параметра θ распределения ξ. Верно ли, что $t^k(\xi)$ — несмещенная оценка значения функции $\tau(\theta) = \theta^k$?

4.14 Пусть ξ_1, ξ_2 —независимые случайные величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Является ли статистика $t(\xi) = \dfrac{1}{3}\xi_1^2 + \dfrac{2}{3}\xi_2^2$ несмещенной оценкой σ^2?

4.15 Пусть $t_1(\xi), t_2(\xi)$ — несмещенные оценки минимальной дисперсии параметра θ распределения ξ. Верно ли, что $P\Big(t_1(\xi) = t_2(\xi)\Big) = 1$?

4.16 Пусть $t_1(\xi)$ — эффективная оценка параметра μ нормального распределения, $t_2(\xi)$ — несмещенная оценка, не обладающая свойством эффективности. Сравнить по величине дисперсии $Dt_1(\xi)$ и $Dt_2(\xi)$ этих оценок?

4.17 Пусть Ł(x, θ) — функция правдоподобия. Какая оценка $\hat{\theta}(\xi)$ называется оценкой максимального правдоподобия?