МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Ю.П. Пытьев, И.А. Шишмарев, Е.И. Волков, Е.Н. Терентьев

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Издательство
Московского университета
1985

УДК 519.2

Задачи по теории вероятностей и математической статистике /Ю.П.Пытьев, И.А.Шишмарев, Б.И.Волков и др. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 69 с.

В пособии приведены традиционные задачи, отражающие основные понятия теории вероятностей и математической статистики, и задачи, важные для приложений и отвечающие специфическим требованиям физического образования. Пособие соответствует книге Ю.П.Пытьева и И.А.Шишмарева "Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков" (Изд-во Моск. ун-та, 1983).

Для студентов третьего курса физического факультета.

Р е ц е н з е н т ы:

проф. А.А.Арсеньев
проф. О.А.Хрусталев

Юрий Петрович Пытьев
Илья Андреевич Шишмарев
Борис Иванович Волков
Евгений Николаевич Терентьев

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Заведующий редакцией С.И. Зеленский
Редактор Ф.И. Горобец

Подписано к печати 28.12.84. Формат 60x90/16. Бумага офс. № 1.
Офсетная печать. Усл.печ.л. 4,25. Уч.-изд.л. 3,62. Тираж
600 экз. Заказ № 1097 Цена 10 коп. Заказное

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета
103009, Москва, ул.Герцена, 5/7.
Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы

077(02)-85 - заказная

Предисловие

Настоящий задачник отвечает семестровому курсу лекций, читаемому на физическом факультете МГУ и отраженному в книге Ю.П.Пытьева и И.А.Шишмарева "Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков". Задачник содержит как традиционные для курса теории вероятностей задачи, в основном взятые из известного задачника Л.Д.Мешалкина, так и задачи, иллюстрирующие применение методов теории вероятностей в физических исследованиях.

ЗАДАЧИ

§1. Пространство элементарных событий. Алгебра событий

1.1. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_1 < r_2 < \dots < r_{10}$. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k. Что означают события $B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k$; $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$; $D = A_5 \circ A_6$; $E = \bar{A}_1 \cap A_2$? Знак $\circ$ обозначает симметрическую разность множеств: $A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.2. Доказать, что для любых событий A и B соотношения $A \subset B$, $\bar{A} \supset \bar{B}$, $A \cup B = B$, $A\bar{B} = \varnothing$ равносильны.

1.3. Доказать равенства:

а) $\overline{\bar{A}\bar{B}} = A \cup B$;

б) $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = AB$;

в) $A \cup B = (AB) \cup (A \circ B)$;

г) $\overline{A \circ B} = (AB) \cup (\bar{A}\bar{B})$;

д) $A \circ B = \overline{(A\bar{B})} \circ \overline{(\bar{A}B)}$;

е) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$;

ж) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$.

1.4. Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A_i $(i = 1, \dots, n)$ заключается в том, что i-я деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что:

а) ни одна деталь не имеет дефектов;

б) хотя бы одна деталь имеет дефект;

в) только одна деталь имеет дефект;

г) не более двух деталей имеют дефекты;

д) по крайней мере два изделия не имеют дефектов;

е) точно два изделия дефектны.

1.5. Даны $p = P(A)$, $q = P(B)$, $r = P(A \cup B)$. Найти $P(A \circ B)$, $P(A\bar{B})$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

1.6.1. Известно, что совместное наступление событий A_1 и A_2 влечет наступление события A.

1) Доказать, что

$$P(A) \geq P(A_1)+P(A_2)-1.$$

2) Доказать следующее неравенство для вероятностей трех событий A_1, A_2, A_3: если $A_1 A_2 A_3 \subset A$, то

$$P(A) \geq P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

§2. Понятие вероятности

2.1. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Каждому возможному исходу, требующему n бросаний, припишем вероятность 2^{-n}. Описать пространство элементарных событий. Найти вероятность следующих событий:

а) опыт окончится до 6-го бросания;

б) потребуется четное число бросаний.

2.2. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предполагая, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго, найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

2.3. Колода игральных карт содержит 52 карты: 4 масти по I3 карт в каждой. Вытаскивание любой карты одинаково вероятно. Вытащили 6 карт. Описать пространство элементарных исходов, а также:

I) найти вероятность того, что среди этих карт будет король пик,

2) найти вероятность того, что среди этих карт будут представители всех мастей,

3) найти наименьшее число карт, которое необходимо взять из колоды, чтобы вероятность того, что среди них встретятся хотя бы две карты одинакового наименования, была более I/2?

2.4. n людей садятся случайным образом за круглый стол. 1)Найти вероятность того, что:

а) два фиксированных лица A и B сядут рядом, причем B слева от A;

б) три фиксированных лица A, B и C сядут рядом, причем A справа от B, а C слева;

2) найти те же вероятности в случае, когда люди садятся по одну сторону прямоугольного стола.

2.5. Из последовательности чисел $1, 2, \ldots, n$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1<k<n$ - произвольное целое число?

2.6. В лотерее n билетов, из которых m выигрышные. Как велика вероятность выигрыша для того, кто имеет k билетов, $k \leq n-m$?

2.7. В партии, состоящей из N изделий, имеется M бракованных. Наудачу выбирается n изделий из этой партии $(n \leq N)$. Чему равна вероятность того, что среди них окажутся m бракованных $(m \leq M)$?

2.8. В чулане находится n пар ботинок. Из них случайно выбираются $2r$ ботинок $(2r<n)$. Какова вероятность того, что среди выбранных ботинок

а) отсутствуют парные;

б) имеется ровно одна комплектная пара;

в) имеются ровно две комплектные пары?

2.9. Группа, состоящая из $2N$ мальчиков и $2N$ девочек, делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части число мальчиков и девочек одинаково. Вычислить эту вероятность, используя формулу Стирлинга.

2.I0. Каждая из n палок разламывается на две части - длинную и короткую. Затем $2n$ полученных обломков объединяются в n пар, каждая из которых образует новую "палку". Найти вероятность того, что:

а) все обломки объединены в первоначальном порядке;

б) все длинные части соединены с короткими.

2.II. Показать, что более вероятно при одновременном бросании четырех костей получить хотя бы одну единицу, чем при 24 бросаниях двух костей получить хотя бы один раз две единицы.

2.I2. Получить биноминальное распределение как предельный случай гипергеометрического при $n \longrightarrow \infty$, $k=pn$, $p=const$, $0<p<1$, n_1, k_1 - фиксированы:

$$\frac{C_n^{k_1} C_{n-k}^{n_1-k_1}}{C_n^{n_1}} \longrightarrow C_{n_1}^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n_1-k_1}.$$

2.I3. В статистической механике рассматриваются механические системы, состоящие из r неразличимых частиц и n ячеек, каждая из частиц попадает в одну из ячеек. Состояние такой системы описывается как распределение r частиц по n ячейкам и определяется набором чисел $0 \leq m_i \leq r$ $(i=1,\ldots,n)$, где m_i число частиц в i-й ячейке.

Фотоны, атомные ядра и атомы, содержащие четное число элементарных частиц, подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна, в которой рассматриваются только различные состояния и каждому из них приписывается равная вероятность. Найти ее.

2.14. Электроны, протоны, нейтроны подчиняются статистике Ферми – Дирака, в которой предполагается, что:

а) в одной ячейке не может находиться более одной частицы;

б) все различные состояния, удовлетворяющие первому условию, имеют равную вероятность. Найти эту вероятность в случае, когда имеется r частиц и n ячеек, $r \le n$ (см. задачу 2.13).

2.15. Пусть имеется r частиц и n ячеек, причем имеет место статистика Бозе – Эйнштейна (см. задачу 2.13).

1) Доказать, что вероятность наличия в фиксированной ячейке k частиц равна

$$q_k = \frac{C_{n+r-k-2}^{r-k}}{C_{n+r-1}^{r}}.$$

2) Показать, что

$$q_0 > q_1 > q_2 > \ldots .$$

3) Доказать, что если n и r неограниченно возрастают, причем среднее число частиц r/n, приходящихся на одну ячейку, стремится к $\lambda < \infty$, то $q_k \to \lambda^k/(1+\lambda)^{k+1}$ (правая часть известна под названием геометрического распределения).

4) Доказать, что вероятность того, что m ячеек останутся пустыми, равна $P_m = (C_n^m C_{n-m-1}^{r-1})/C_{n+r-1}^{r}$.

2.16. Если при распределении r частиц по n ячейкам все n^r распределений будут иметь равную вероятность, то говорят о статистике Максвелла – Больцмана (см. задачи 2.13 и 2.14). Найти вероятность того, что:

а) первая ячейка содержит k_1 частиц, вторая – k_2 частиц и т.д., где $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$;

б) при $n = r$ ни одна ячейка не останется пустой;

в) при $n = r$ останется пустой только одна ячейка.

2.17. В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу брошена точка M. Пусть (ξ, η) – ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.

1) Доказать, что для $0 \le x, y \le 1$

$$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\} = xy.$$

2) Найти для $0 < z < 1$

а) $P\{|\xi - \eta| < z\}$; б) $P\{\xi\eta < z\}$;

в) $P\{\min(\xi,\eta) < z\}$; г) $P\{\max(\xi,\eta) < z\}$;

д) $P\{\frac{1}{2}(\xi+\eta) < z\}$.

2.18. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается наудачу монета диаметром $2r < a$. Найти вероятность того, что:

а) монета попадает целиком внутрь одного квадрата;

б) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

2.19. Два лица независимо друг от друга имеют равную вероятность прийти в метро в любой момент промежутка времени T. Найти вероятность того, что время ожидания одним другого будет меньше t $(0 < t < T)$.

2.20. Пусть ξ, η определены также, как в задаче 2.17. Найти вероятность того, что корни уравнения

$$x^2 + \xi x + \eta = 0$$

а) действительны; б) оба положительны.

2.21. В прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = l$ и $BC = k$ бросается наудачу точка M. Найти вероятность того, что одновременно происходят события $\{h < x\}$ и $\{\alpha < y\}$, где h – длина перпендикуляра, опущенного из точки M на AB, $\alpha = \angle MAB$, x, y – любые.

2.22. На окружность единичного радиуса наудачу ставятся три точки A, B, C. Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

2.23. В сфере радиуса R случайно и независимо друг от друга разбросано N точек.

1) Чему равна вероятность того, что расстояние от

центра до ближайшей точки будет не менее r ?

2) К чему стремится вероятность, найденная в п.I., если

$$R \to \infty \text{ и } \frac{N}{R^3} \to \frac{4}{3}\pi\lambda \ ?$$

2.24. Из последовательности чисел $1, 2, \dots, N$ отобраны наудачу n чисел и расположены в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Какова вероятность того, что $x_m < M$? Найти предел этой вероятности, когда $M, N \to \infty$ так, что $M/N \to \alpha > 0$.

2.25. Дворцовый чеканщик кладет в каждый ящик, вместимостью в n монет, $m < n$ фальшивых. Король подозревает чеканщика и подвергает проверке монеты, взятые наудачу по одной в каждом из K ящиков. Какова вероятность того, что чеканщик не будет разоблачен? Рассмотреть случай $m = 1$, $n = K = 100$.

2.26. Найти вероятность того, что при раздаче колоды в 52 карты четырем игрокам первый из них получит ровно n пар "туз-король одной масти".

2.27. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ - случайные события. Доказать формулы:

а) $$P\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} P\{A_k\} - \sum_{1 \le i, j \le n} P\{A_i A_j\} + \dots + (-1)^{n+1} P\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\};$$

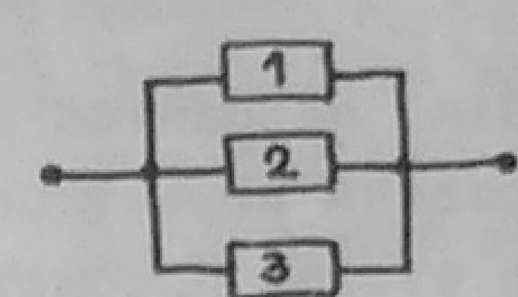
б) $$P\left\{\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} P\{A_k\} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} P\{A_k \cup A_j\} + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} P\{A_k \cup A_i \cup A_j\} + \dots + (-1)^{n-1} P\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\}.$$

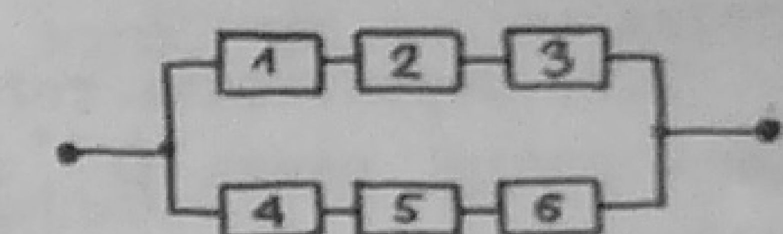
§3. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса

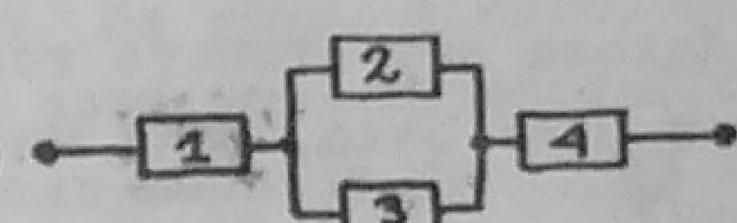
3.1. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность

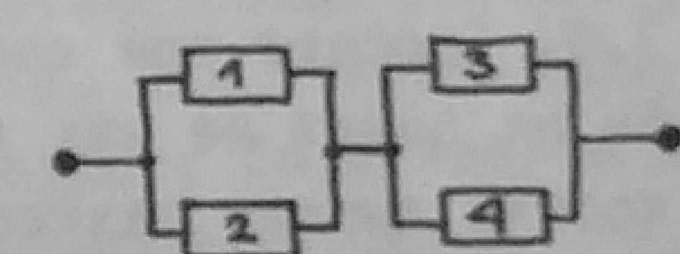
того, что студент знает все вопросы. Найти ту же вероятность, используя классическое определение вероятности.

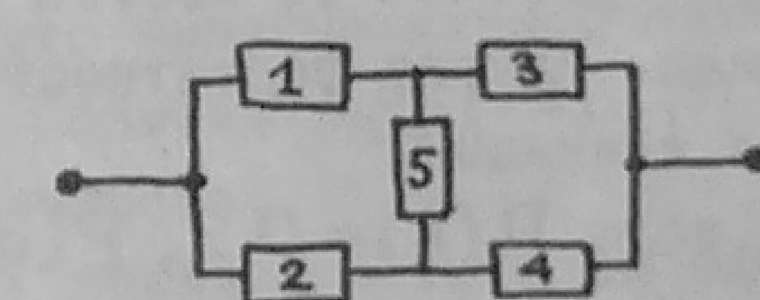
3.2. В изображенных ниже пяти схемах, образующих цепи элементов с одним входом и одним выходом, отказы элементов являются независимыми. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Известна вероятность неотказа - надежность p_k k-го элемента (соответственно $q_k = 1 - p_k$ вероятность отказа). Вычислить надежность P каждой из схем.

а)


б)


в)


г)


д)


3.3. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно: есть в ее фондах книга или нет. И если книга есть, то одинаково вероятно: занята она другим читателем или нет. Что более вероятно - достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

3.4. Стрелок A поражает мишень с вероятностью $p_A = 0.6$, стрелок B - с вероятностью $p_B = 0.5$ и стрелок C - с вероятностью $p_C = 0.4$. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал C в мишень или нет?

3.5. Известно, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин - дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что количество мужчин и женщин одинаково).

3.6. На фабрике, изготовляющей болты, машины A, B, C производят соответственно 25, 35 и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен машиной A; машиной B; машиной C?

3.7. Известно, что вероятность случая: два близнеца – одного пола ≈ 0.64, причем вообще вероятность рождения мальчика ≈ 0.51. Найти вероятность того, что второй из близнецов мальчик, при условии, что первый из них мальчик.

3.8. Вероятность того, что письмо находится в письменном столе, равна P, причем с равной вероятностью оно может быть в любом из восьми ящиков стола. Просмотрели семь ящиков и письма не нашли. Какова вероятчость, что письмо в восьмом ящике?

3.9. Бросают три кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет одно очко, если на всех трех костях выпали разные грани?

3.10. Известно, что при бросании 10 костей появилось, по крайней мере, одна единица. Какова вероятность того, что появились две или более единицы?

3.11. 1) Доказать, что если $P(A)=0.9$, $P(B)=0.9$, то $P(A|B)\geqslant 0.875$.

2) Доказать, что $P(A_1|A_2)\geqslant 1-P(\bar{A}_2)/P(A_1)$

3.12. Пусть $P(A)=p$, $P(B)=1-\varepsilon$, где $\varepsilon<p$. Оценить $P(A|B)$ сверху и снизу.

3.13. Известно, что события A и B независимы и не пересекаются. Найти $\min\{P(A), P(B)\}$.

3.14. Даны три попарно независимых события, которые однако все вместе произойти не могут. Предполагая, что все они имеют одну и ту же вероятность p, определить наибольшее возможное значение p.

3.15. В жюри из 3-х человек два члена жюри независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для выяснения решения бросает монету. Окончательное решение выносится большинством голосов. Другое жюри из одного человека выносит правильное решение с вероятностью p. Какое из этих жюри выносит правильное решение с большей вероятностью?

3.16. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара,

переложены два вынутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.

3.17. В трех урнах содержатся белые и черные шары. В первой – 2 белых и 3 черных шара, во второй – 2 белых и 2 черных шара, а в третьей – 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны переложен шар во вторую. После этого шар из второй урны переложен в третью. Наконец, из третьей урны шар переложен в первую.

1) Какой состав шаров в первой урне представляется наиболее вероятным?

2) Определить вероятность того, что состав шаров во всех урнах остается без изменения.

3.18. Некто знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей, когда он тащит билет первым или последним?

3.19. Из урны, в которой было $m\geqslant 3$ белых шаров и n черных, потеряли один шар неизвестного цвета. Для того чтобы определить состав шаров в урне, из нее наудачу были вынуты два шара. Найти вероятность того, что был потерян белый шар, если известно, что вынутые шары оказались белыми.

3.20. События A_i $(i=1,\dots,n)$ – независимы, $P(A_k)=p_k$. Найти вероятность:

а) появления хотя бы одного из этих событий;

б) не появления всех этих событий;

в) появления только одного из них.

3.21. Один школьник, желая подшутить над своими товарищами, собрал в гардеробе все шапки, а потом развесил их в случайном порядке. Какова вероятность p_n, что хотя бы одна шапка попала на прежнее место, если всего в гардеробе было n крючков и на них n шапок. Найти $\lim_{n\to\infty} p_n$.

3.22. Пусть a_j – вероятность излучения радиоактивным атомом частицы с энергией E_j, $j=1,\dots,n$, $\sum_{j=1}^{n} a_j=1$, причем вообще вероятность излучения частицы за промежуток времени t равна $1-e^{-\lambda t}$, $\lambda>0$. Найти вероятность излучения частицы с энергией E_j за время t.

§4. Последовательность независимых испытаний

4.1. В модели идеального равновесного пространственно-однородного газа пренебрегают размерами частиц, частицы между собой не взаимодействуют и вероятность обнаружить частицу в любой части сосуда объемом V_1 равна V_1/V, где V – объем всего сосуда. Известно, что в сосуде находится N частиц. Определить вероятность обнаружить N_1 частиц в фиксированном объеме V_1 сосуда.

4.2. Для того чтобы узнать, сколько рыб в озере, отлавливают 1000 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. При каком числе рыб в озере будет наибольшей вероятность встретить среди пойманных 150 рыб 10 меченых?

4.3. Допустим, что вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, а вероятность поражения цели при $k \geqslant 1$ попаданиях в нее $1-q^k$. Какова вероятность того, что цель поражена, если было произведено n выстрелов?

4.4. Допустим, что некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, а вероятность развития насекомого из яйца равна p. Предполагая взаимную независимость развития яиц, найти вероятность того, что у насекомого будет ровно ℓ потомков.

4.5. Вероятность единственно возможных и несовместных гипотез $A_1, A_2, \dots, A_k$ об условиях наступления события B равны до испытаний соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$; вероятности наступления B, соответствующие гипотезам, равны $P_1, P_2, \dots, P_k$. Известно, что при n_1 независимых испытаниях событие B наступило m_1 раз. Известно также, что при следующей серии в n_2 испытаний событие B наступило m_2 раз. Доказать следующее свойство формул Байеса: апостериорные вероятности гипотез, вычисленные после второй серии испытаний с учетом вероятностей этих гипотез после первой серии испытаний, всегда равны вероятностям, вычисленным просто для серии в n_1+n_2 испытаний, в которой событие B наступило m_1+m_2 раз.

4.6. В партии из N изделий имеется $M<N$ дефектных. Из партии наудачу отобрано $n<N$ изделий, которые подвергаются сплошной проверке. При проверке возможны ошибки; так с вероятностью p дефектное изделие признается "годным" и с вероятностью q годное – "дефектным". Найти вероятность того, что m изделий будут признаны " дефектными".

4.7. Пусть имеется N ящиков. В эти ящики независимо друг от друга случайно бросают n дробинок. Предполагается, что вероятность попадания любой фиксированной дробинки в j-й ящик равна $1/N$ для всех $j=1,2,\dots,N$. Обозначим $\mu_0 = \mu_0(n,N)$ число пустых ящиков. Показать, что закон распределения числа пустых ящиков $\mu_0(n,N)$ задается формулами:

$$P\{\mu_0(n,N)=k\} = C_N^k \left(1-\frac{k}{N}\right)^n \cdot P\{\mu_0(n,N-k)=0\},$$

$$P\{\mu_0(n,N)=0\} = \sum_{\ell=0}^{N} C_N^\ell (-1)^\ell \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^n \quad \text{или}$$

рекуррентной формулой $P\{\mu_0(n+1,N)=k\} =$

$$= \left(1-\frac{k}{N}\right) P\{\mu_0(n,N)=k\} + \frac{k+1}{N} P\{\mu_0(n,N)=k+1\}.$$

4.8. Пусть имеется N ячеек, в которые бросают независимо n' комплектов, по m частиц в каждом комплекте. Частицы каждого комплекта размещаются в ячейках по одной, причем все C_N^m возможных размещений считаются равновероятными. Положим $n=n'm$, где n – общее число частиц в n' комплектах. Обозначим $\mu_0'(n,N)$ число пустых ячеек. Показать, что закон распределения числа пустых ячеек задается формулами

$$P\{\mu_0'(n,N)=k\} = C_N^k \left[\frac{C_{N-k}^m}{C_N^m}\right]^{m'} P\{\mu_0'(n,N-k)=0\},$$

$$P\{\mu_0'(n,N)=0\} = \left(C_N^m\right)^{-n'} \sum_{\ell=0}^{N} C_N^\ell (-1)^\ell \left(C_{N-\ell}^m\right)^{n'}.$$

4.9. Ведется стрельба до первого попадания. Выстрелы независимы и вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Какова вероятность того, что потребуется 5 выстрелов, если известно, что было сделано четное число выстрелов?

4.10. Ведется стрельба до первого попадания. Выстрелы независимы и вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Какова вероятность того, что первые два выстрела неудачны?

§5. Распределение Пуассона

5.1. Среди семян пшеницы 0.6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить не менее

3 семян сорняков; не более I6 семян сорняков; ровно 6 семян сорняков?

5.2. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее 3 опечаток.

5.3. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по I00 штук.

I) Чему равна вероятность того, что:

а) в коробке не окажется бракованных сверл;

б) число бракованных сверл окажется не более 2.

2) Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее I00 исправных?

5.4. Сколько изюма в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность иметь в булочке хотя бы одну изюмину, была не менее 0.99?

5.5. Пусть вероятность частицы, вылетевшей из радиоактивного источника, быть зарегистрированной счетчиком равна I/I0000. Предположим, что за время наблюдения из источника вылетело 30 000 частиц. Какова вероятность того, что счетчик:

а) зарегистрировал более I0 частиц;

б) не зарегистрировал ни одной частицы;

в) зарегистрирует ровно 3 частицы?

5.6. Какое наименьшее число частиц в условиях предыдущей задачи должно вылететь из источника для того, чтобы с вероятностью, большей 0.99, счетчик зарегистрировал более 3 частиц?

5.7. Предположим, что при наборе книги существует вероятность $p=10^{-4}$ того, что любая буква будет набрана неправильно. После набора гранки прочитывает корректор, который обнаруживает каждую опечатку с вероятностью $q=0.9$. После корректора - автор, обнаруживающий каждую из оставшихся опечаток с вероятностью $r=0.5$. Найти вероятность того, что в книге со I00 тысячами печатных знаков останется после этого не более I0 незамеченных опечаток.

5.8. На лекции присутствует 200 человек. Найти вероятность того, что k человек из присутствующих родились I мая и ℓ родились 7 ноября. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна I/365. Вычислить эту вероятность при k = I и ℓ = 2. Найти вероятность того, что число родившихся I мая и 7 ноября не больше 2.

§6. Локальная и интегральная теоремы Муавра - Лапласа

6.I. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0.5I5. Какова вероятность того, что среди I0 тысяч новорожденных мальчиков будет не больше, чем девочек?

6.2. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 2I-м году жизни равна 0.006. Застрахована группа в I0 000 человек 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес I.2 рубля страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного страховое учреждение выплачивает наследникам I00 рублей. Какова вероятность того, что:

а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

б) его доход превысит 6000 рублей; 4000 рублей?

6.3. При проведении телепатического опыта индуктор независимо от предшествующих опытов выбирает с вероятностью I/2 один из двух предметов и думает о нем, а реципиент (приемник) угадывает, о каком предмете думает индуктор. Опыт был повторен I00 раз, при этом было получено 60 правильных ответов. Какова вероятность совпадения при одном опыте в предположении, что телепатической связи между индуктором и реципиентом нет? Можно ли приписать полученный результат чисто случайному совпадению или нет?

6.4. Театр, вмещающий I000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из I00 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других выбирает с вероятностью I/2 любой из входов. На сколько можно будет сократить число мест в гардеробе, если зрители будут приходить поодиночке и также независимо друг от друга с равной вероятностью выбирать любой из входов?

§7. Случайные величины и функции распределения

7.I. ξ и η независимы, причем $P\{\xi=0\}=P\{\xi=1\}=1/2$, $P\{\eta<x\}=x$ $(0<x<1)$. Найти функции распределения

а) $\zeta_1=\eta+\xi$, б) $\zeta_2=\eta+\frac{1}{2}\xi$, ? в) $\zeta_3=\xi\cdot\eta$.

7.2. Найти функцию распределения суммы независимых случайных величин ξ и η, первая из которых равномерно распределена в интервале $(-h, h)$, а вторая имеет функцию распределения $F(x)$.

√ 7.3. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$. Найти плотность распределения случайной величины:

а) $\eta = a\xi + b$, a, b – действительные числа;

б) $\eta = \xi^{-1}$; в) $\eta = \cos\xi$;

г) $\eta = f(\xi)$, где $f(x)$ – непрерывная монотонная функция.

√ 7.4. Плотность независимых случайных величин ξ и η равна:

\+ а) $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ae^{-ax}, & x > 0, \ a > 0; \end{cases}$

б) $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, x \ge a, \\ 1/a, & 0 < x < a, \ a > 0; \end{cases}$

? в) $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Найти плотность распределения $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$.

\+ 7.5. Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы и подчиняются распределению Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти условное распределение ξ_1 при фиксированной сумме $\xi_1 + \xi_2 = N$.

. 7.6. Доказать, что если величины ξ и η независимы и их плотность распределения равны

$$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

то величины $\xi + \eta$ и ξ/η также независимы.

√ 7.7. Пусть ξ и η независимы и имеют плотности распределения $p(x)$ и $q(y)$ соответственно. Найти распределение

\+ а) $\max(\xi, \eta)$, б) $\min(\xi, \eta)$.

. 7.8. Решить предыдущую задачу, если ξ и η равномерно распределены на $[0, 2]$ и на $[1, 3]$ соответственно.

\+ 7.9. Случайная величина α равномерно распределена на $[0, 1]$. Показать, что случайная величина $\xi = [\alpha(n+1)]$ (n – фиксировано, $[\cdot]$ – целая часть) имеет "равномерное дискретное" распределение

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{1}{n+1}, \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

\+ 7.10. Показать, что случайная величина $\eta = [\ln\alpha / \ln(1-p)]$ (α и $[\cdot]$ обозначают то же, что и в задаче 7.9) имеет геометрическое распределение

$$p_k = P\{\eta = k\} = p(1-p)^k, \ k = 0, 1, \ldots$$

7.11. Показать, что случайная величина $\xi_n = \prod_{i=0}^{n} \alpha_i$, где α_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ – независимые случайные величины, распределенные равномерно на $[0, 1]$, распределена с плотностью вероятности

$$p_n(x) = \frac{(-\ln x)^n}{n!}, \quad 0 < x < 1.$$

Указание. Применить метод математической индукции.

7.12. Используя результат предыдущей задачи, показать, что случайная величина ξ, равная минимальному n, при котором выполняется неравенство $\prod_{i=0}^{n} \alpha_i < e^{-\lambda}$, распределена по закону Пуассона с параметром λ (α_i обозначает то же, что и в предыдущей задаче).

7.13. Пусть заданы независимые случайные величины α_1 и α_2, равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$. Образуем новые случайные величины ξ_1 и ξ_2 по формулам

$$\begin{cases} \xi_1 = \mu + \sigma(-2\ln\alpha_1)^{1/2}\cos 2\pi\alpha_2, \\ \xi_2 = \mu + \sigma(-2\ln\alpha_2)^{1/2}\sin 2\pi\alpha_1, \end{cases}$$

$|\mu| < \infty$, $\sigma > 0$. Показать, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются независимыми нормально распределенными с средним μ и дисперсией σ^2.

\+ 7.14. Пусть известна плотность вероятности $p_X(x)$ того, что объект расположен на расстоянии X от линзы. Имеет место формула линзы $Y^{-1} + X^{-1} = F^{-1}$, где F – фокусное расстояние линзы, а X и Y – соответственно расстояния от объекта до линзы и от линзы до изображения. Определить плотность вероятности $p_Y(y)$ того, что изображение объекта располагается на расстоянии Y от линзы. Рассмотреть частный случай равновероятных расположений объекта от линзы в интервале $\left(2F - \frac{F}{2}, 2F + \frac{F}{2}\right)$ расстояний.

7.15. Пусть случайные величины ξ и η независимо и одинаково распределены, причем $P\{\xi = 1\} = p > 0$, $P\{\xi = 0\} = 1 - p > 0$.

Введем новую случайную величину ζ равную нулю, если $\xi+\eta$ – четное число и единице, если $\xi+\eta$ – нечетное число. При каком значении p случайные величины ξ и ζ независимы?

\+ 7.16. Пусть ξ – целочисленная неотрицательная случайная величина, принимающая с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ значение $k = 0, 1, 2, \ldots$. Эксперимент состоит в том, что на отрезок $[0,1]$ независимо одна от другой бросается наудачу ξ точек. Обозначим x_i число точек, попавших на интервал $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, $i=1,2,\ldots,n$. Доказать, что x_i независимы.

7.17. Показать, что последовательность двоичных разрядов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ числа $\xi=\alpha_1 2^{-1}+\alpha_2 2^{-2}+\cdots+\alpha_n 2^{-n}$ представляет собой результат n независимых испытаний Бернулли с параметром 1/2, если ξ – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$.

7.18. В мессбауэровском эксперименте источник γ-квантов в направлении детектора излучения испускает мессбауэровский γ-квант независимо от энергии с вероятностью $\varkappa$ и с вероятностью $1-\varkappa$ испускает фоновый γ-квант. Распределение энергий мессбауэровских γ-квантов оценивается плотностью распределения Коши

$$W_s(E)=\frac{2}{\pi\Gamma_s}\,\frac{1}{1+\left(\frac{E-E_0}{\Gamma_s/2}\right)^2},\quad |E|<\infty,$$

где E_0 – наиболее вероятная энергия γ-кванта. Вероятность (эффекта Мессбауэра) мессбауэровскому γ-кванту быть поглощенным (независимо от энергии) без потери энергии на отдачу ядру кристаллической решетки равна f. Вероятность пролета мессбауэровского γ-кванта с энергией E через вещество оценивается выражением $\exp(-\sigma(E)\cdot n)$, где $\sigma(E)$ – сечение резонансного поглощения и n – концентрация резонансных ядер по направлению движения γ-квантов. Детектор регистрирует любой γ-квант мессбауэровский или фоновый независимо от энергии. Определить вероятность зарегистрировать γ-квант в мессбауэровском эксперименте.

§8. Моменты случайных величин. Математическое ожидание. Дисперсия

8.1. Найти функцию распределения и среднее значение числа бросаний монеты в задаче 2.1.

√ 8.2. Случайные величины ξ и η независимы, причем $M\xi=2$, $D\xi=1$, $M\eta=1$, $D\eta=4$. Найти математическое ожидание и дисперсию:

а) $\zeta_1=\xi-2\eta$, б) $\zeta_2=2\xi-\eta$.

√ 8.3. Предположим, что в озере было 15 000 рыб, причем 1000 из них меченых. Из озера было отловлено 150 рыб. Найти математическое ожидание числа меченых рыб среди отловленных.

√ 8.4. При бросании n игральных костей определить математическое ожидание, дисперсию и центральный момент 3-го порядка суммы очков на всех костях.

√ 8.5. Бросают две кости. Найти математическое ожидание суммы выпавших очков, если известно, что выпали разные грани.

8.6. Плотность распределения величин скорости $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ движения молекул газа имеет вид (распределение Максвелла):

$$W(\vec{v})=W(v_x,v_y,v_z)=\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2\theta}\right),$$

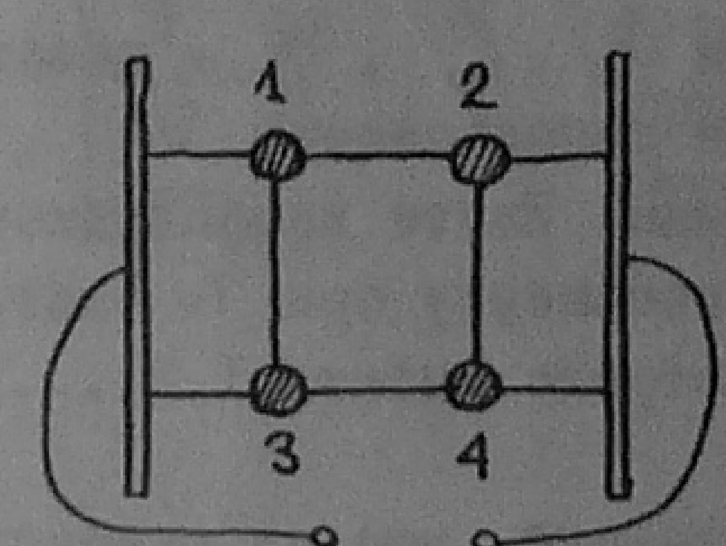
$-\infty<v_x,v_y,v_z<+\infty$, где m – масса молекул, θ – температура газа. Найти плотность распределения компоненты скорости v_x, модуля скорости $v=|\vec{v}|$, импульса $\vec{p}=m\vec{v}$ и кинетической энергии $\varepsilon=mv^2/2$.

8.7. В условиях предыдущей задачи рассчитать $\overline{v_x}$, $\overline{v_x^2}$, $\overline{v}$, $\overline{v^2}$, $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon^2}$, где черта означает среднее – математическое ожидание.

8.8. В условиях задачи 8.6 найти распределение по углам частиц максвелловского газа, вылетающих в вакуум из небольшого отверстия в стенке сосуда.

Указание. Перейти к сферическим координатам: σ – угол между направлением скорости $\vec{v}$ и осью x, перпендикулярной стенке; φ – азимутальный угол.

8.9. В электрическую цепь включена квадратная сетка, состоящая из 2x2 узлов. Каждый узел сетки независимо от других узлов с вероятностью p блокируется (не проводит электрический ток) и с вероятностью $q=1-p$ не блокируется (проводит электрический ток).



1097

Определить вероятность того, что через сетку течет ток и найти порог протекания - среднее относительное число неблокированных узлов сетки.

8.10. Урна содержит шары с номерами от 1 до N. Пусть ξ - наименьший номер, полученный в результате n извлечений, если производится случайный выбор с возвращением. Найти $M\xi$.

8.11. Известно, что вероятность выхода из строя электронной лампы, проработавшей x дней, равна в следующие Δ дней $0.003\Delta + o(\Delta)$. Здесь $o(\Delta)$ означает, что $\frac{o(\Delta)}{\Delta} \to 0$ при $\Delta \to 0$. Через год работы лампу заменяют, если она даже не вышла из строя. Найти среднее время работы лампы.

8.12. Найти среднее значение и дисперсию произведения двух независимых случайных величин ξ и η с равномерными законами распределения: ξ - в интервале $[0,1]$, η - в интервале $[1,3]$.

8.13. Доказать, что если ξ и η независимы, то

$$D(\xi\eta) = D\xi D\eta + (M\xi)^2 D\eta + (M\eta)^2 D\xi$$

т.е.

$$D(\xi\eta) \geq D\xi D\eta.$$

8.14. Говорят, что $\xi > 0$ имеет логнормальное распределение с параметрами (a, σ^2), если $\eta = \ln\xi$ имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$. Выписать плотность распределения ξ, найти $M\xi$ и $D\xi$.

8.15. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с одними и теми же параметрами a и σ.

1) Найти коэффициент корреляции величин $\alpha\xi + \beta\eta$ и $\alpha\xi - \beta\eta$, а также их совместное распределение.

2) Доказать, что $M\max(\xi, \eta) = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

8.16. Найти $cov(\xi, \xi^k)$, $k = 1,2,\ldots$, если ξ - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $(0,1)$.

8.17. Найти $cov(\xi+\zeta, \zeta+\eta)$, если ξ, ζ, η - независимые случайные величины с заданными дисперсиями.

8.18. Ведется стрельба по мишеням. Найти корреляционный момент числа попадания в девятку и восьмерку при n выстрелах, если вероятность при каждом выстреле выбить 1,2,...,10 очков одинакова.

8.19. Построить пример, показывающий, что из равенства

нулю коэффициента корреляции не следует независимость случайных величин.

8.20. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины η, равной сумме случайного числа ν независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_i: $\eta = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i$ если известны $M\nu$, $D\nu$, $M\xi_i = a$, $D\xi_i = b$.

8.21. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, распределенной по закону $\chi^2_{n+\nu}$ с $n+\nu$ степенями свободы, если n - заданное число, ν - случайная величина распределенная по биномиальному закону

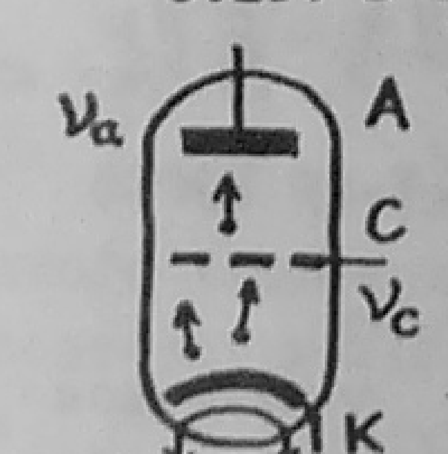
$$P\{\nu = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

8.22. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + a_i)^2$, где a_i - число, а $\xi_i \in N(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ независимы и нормально распределены. Ответ выразить через параметр $\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$. (Распределение η называется нецентральным $\chi^2_{n,\delta}$ с параметром нецентральности δ).

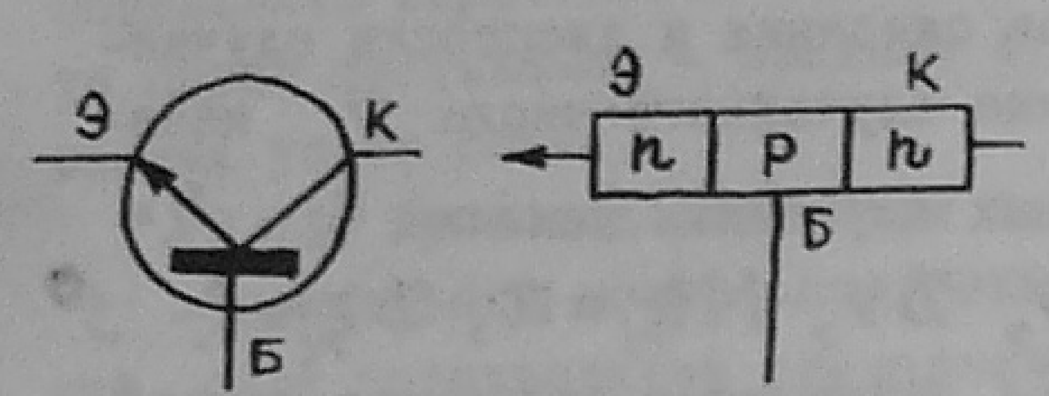
8.23. Как распределена сумма двух независимых случайных величин, имеющих нецентральное распределение Пирсона $\sigma^2\chi^2_{n_1,\delta_1}$ и $\sigma^2\chi^2_{n_2,\delta_2}$ (см. задачу 8.22).

8.24. В полупроводниковом детекторе под действием частиц определенной энергии генерируются электронно-дырочные пары. Пусть в детектор попало K частиц, среднее $\overline{K}$, дисперсия DK числа частиц известны. Вероятность образования одной электронно-дырочной пары под действием одной частицы равна p. Найти среднее число $\overline{m}$ и дисперсию Dm возникающих электронно-дырочных пар.

8.25. В триоде катод излучает ν электронов, с вероятностью p электрон попадает на анод и с вероятностью $1-p$ на сетку. Найти среднее число и дисперсию числа электронов, попавших на анод ν_a, на сетку ν_c и $cov(\nu_a, \nu_c)$. Известно $\overline{\nu}$ и $D\nu = \sigma^2$.



8.26. Пусть n – число инжектированных электронов из эмиттера в базу, из них $n_Б$ – рекомбинировало и $n_К$ попало в коллектор. $n = n_Б + n_К$, α – вероятность пролета электрона через базу в коллектор. Известно $\bar{n}$, $Dn=\sigma^2$.



Найти $\bar{n}_Б, \bar{n}_К, Dn_Б, Dn_К$ и $cov(n_Б, n_К)$.

8.27. Показать, что для любой случайной величины ξ, $M\xi^2<\infty$ и любой постоянной C имеет место неравенство $M(\xi-C)^2 \geq M(\xi-M\xi)^2$, причем знак равенства достигается лишь при $C=M\xi$.

8.28. Пусть даны две случайные величины ξ_1 и ξ_2 с $M\xi_1=a_1$, $D\xi_1=\sigma_1^2$, $M\xi_2=a_2$, $D\xi_2=\sigma_2^2$ и коэффициентом корреляции $r=[M(\xi_1-a_1)(\xi_2-a_2)]/(\sigma_1\cdot\sigma_2)$. Найти наилучшую в среднеквадратичном аппроксимацию случайной величины ξ_1 линейной комбинацией $\hat{C}_1+\hat{C}_2\xi_2$:

$$\inf_{C_1,C_2} M(\xi_1-C_1-C_2\xi_2)^2 = M(\xi_1-\hat{C}_1-\hat{C}_2\xi_2)^2.$$

8.29. Для случайной величины ξ, $M\xi^2<\infty$ доказать неравенство $M|\xi|\leq\sqrt{M\xi^2}$.

8.30. Обозначим H гильбертово пространство случайных величин $\xi: \{M\xi=0, M\xi^2<\infty\}$. Скалярное произведение $\xi,\eta\in H$ определим равенством $(\xi,\eta)=M(\xi\eta)$, $\|\xi-\eta\|=[(\xi-\eta, \xi-\eta)]^{1/2}$ – расстояние между ξ и η. Пусть L – линейное подпространство в H. Доказать, что $\inf\{\|\xi-\eta\|^2, \eta\in L\} = \|\xi-\hat{\xi}\|$, если и только если $(\xi-\hat{\xi},\eta)=0$ для всех $\eta\in L$ (т.е. когда $\hat{\xi}$ – ортогональная проекция ξ на L).

8.31. Случайная величина $\hat{\xi}$ в задаче 8.30 называется наилучшим приближением ξ случайными величинами из L. Доказать единственность наилучшего приближения.

8.32. Воспользовавшись решением задачи 8.30, дать гео-

метрический вывод неравенства Крамера – Рао.

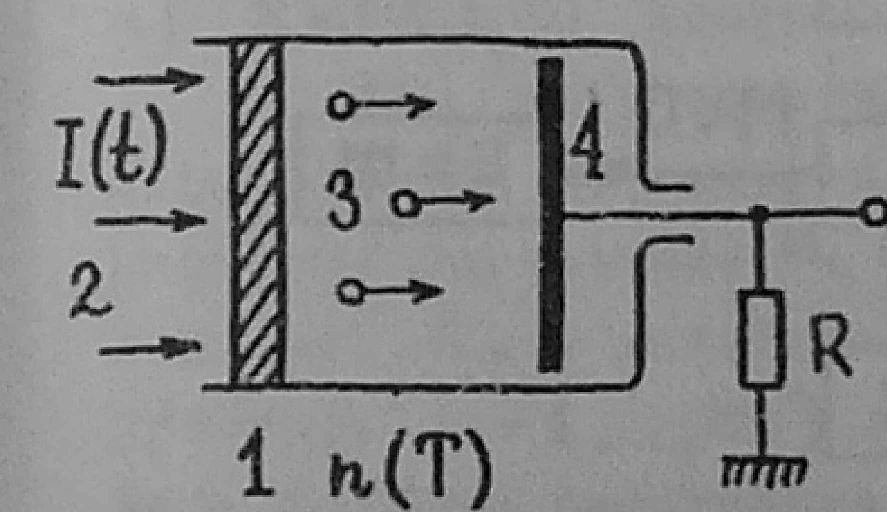
8.33. Согласно теореме Больцмана черное тело за I с излучает в одной моде (волна с определенным направлением поляризации) случайное количество фотонов, описываемое геометрическим распределением вероятностей $P\{\xi=n\}=\left(1-\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\right)\times \exp\left(-n\frac{E}{kT}\right)=(1-p)p^n$, $p=\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$, $n=0,1,\ldots$, где $T=const$ – абсолютная температура черного тела, $E=h\nu$ – энергия излучаемого фотона, ν – частота волны, h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана. Найти среднее значение и дисперсию числа фотонов, испускаемых черным телом за I с в одной моде.

8.34. Рассчитать среднее и дисперсию числа пустых ящиков $\mu_0(n,N)$ в задаче 4.7.

8.35. Число $n(T)$ эмиттированных фотоэлектронов в промежуток времени T (при фиксированной интенсивности падающего светового излучения I) описывается пуассоновским распределением

$$P\{n(T)=r\}=e^{-\alpha T}\frac{(\alpha T)^r}{r!},\ r=0,1,\ldots,$$

где $\alpha=\beta I$, β – коэффициент, характеризующий чувствительность фотодетектора. Найти распределение вероятностей количества излученных фотоэлектронов $n(T)$ при условии, что интенсивность светового потока I описывается распределением вероятностей с плотностью $\omega_I(x)$, $x\geq 0$. Рассмотреть случай $\omega_I(x)=\frac{1}{\sigma^2}e^{-x/\sigma^2}$, $x\geq 0$. Найти среднее и дисперсию $n(T)$.



Фотодетектор:
1-катод (фоточувствительная поверхность); 2-падающее световое излучение; 3-эмиттированные фотоэлектроны; 4-коллекторный анод

8.36. Пусть в точках $x=1,2,\ldots$ находятся атомы однородного вещества, которые независимо друг от друга могут с вероятностью $\sigma(E)$ ($\sigma(E)$ называется также сечением поглощения, E – энергия фотона) поглотить фотон и с вероятностью $1-\sigma(E)$ без рассеяния пропустить его. Считая, что фотон влетает в вещество по оси x, найти

IX-I097

а) распределение вероятностей проникновения фотона по глубинам (вещество-бесконечной толщины);

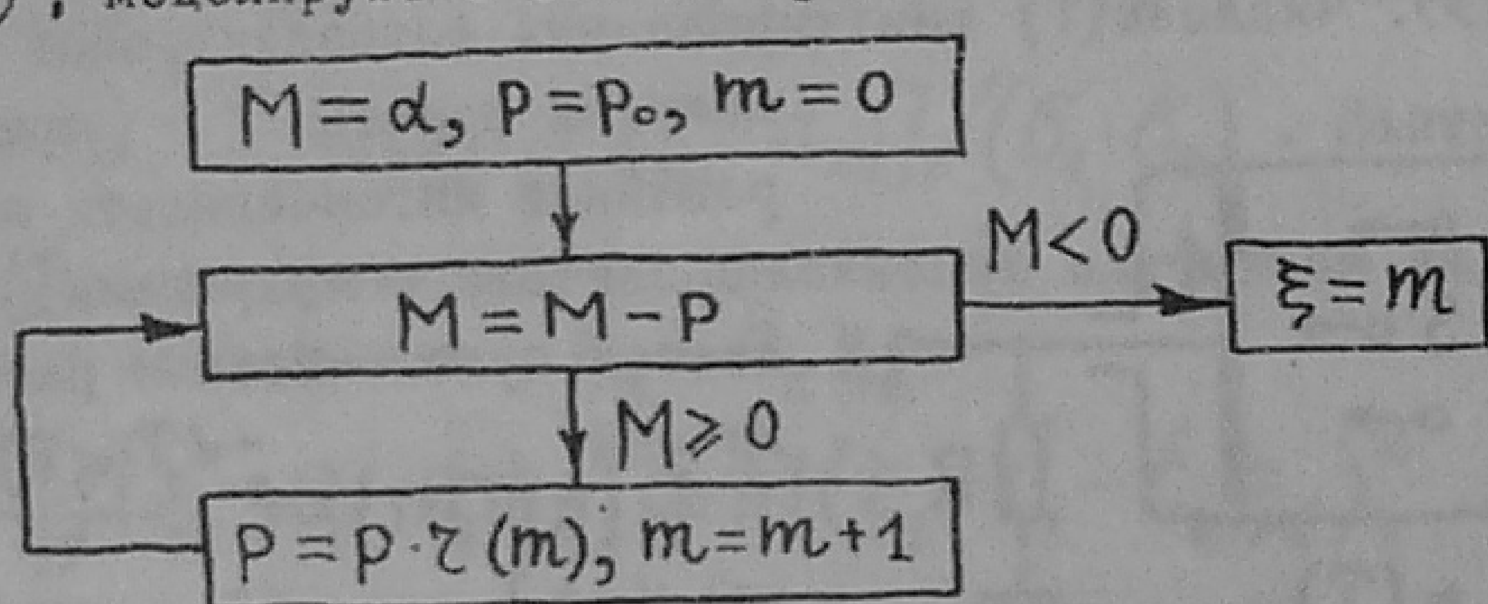
б) вероятность прохождения фотоном слоя вещества толщиной в $K \geqslant 1$ атомов;

в) вероятность прохождения за K атомов в веществе бесконечной толщины;

г) средний пробег фотона в веществе бесконечной толщины;

д) дисперсию пробега фотона в веществе бесконечной толщины.

8.37. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ – последовательность независимых случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $(0,1)$. Дискретную целочисленную случайную величину ξ, распределение вероятностей которой задано рекуррентной формулой $p_{k+1} = p_k \cdot r(k)$, моделируют в ЭВМ по представленному ниже алгоритму:



Среднее число арифметических операций для моделирования пропорционально величине $S = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k$, которая характеризует эффективность указанного алгоритма моделирования. Найти S в случае:

а) биноминального распределения $p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $r(k) = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{1-p}$, $k=0,1,\ldots,n$;

б) распределения Пуассона с параметром λ

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad r(k) = \frac{\lambda}{k+1}, \quad k=0,1,2,\ldots;$$

в) геометрического распределения с параметром p

$$p_k = p(1-p)^k, \quad r(k) = 1-p, \quad k=0,1,2,\ldots;$$

г) гипергеометрического распределения

$$p_k = \frac{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{l-k}}{C_n^l}, \quad \max(0, n_1+l-n) \le k \le \min(n_1, l),$$

$$r(k) = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(n_1-k)(l-k)}{(k+1)(n-n_1-l+1+k)}.$$

8.38. Выразим расстояние между атомами Δx и коэффициент поглощения вещества единицы длины μ через число n атомов, приходящихся на единицу длины:

$$\Delta x = 1/n, \quad \mu = \sigma(E)\cdot n = \sigma(E)/\Delta x.$$

1) В условиях задачи 8.36 оценить вероятность пролета расстояния x в веществе при $\Delta x \to 0$.

2) Показать, что выражение для вероятности пролета расстояния x получается из двух предположений: а) вероятность прохождения фотоном длины Δx от точки x до $x+\Delta x$ не зависит от x: $P(\xi \geqslant x+\Delta x \mid \xi \geqslant x) = P(\xi \geqslant \Delta x)$, б) плотность $p_\xi(x)$ непрерывна.

8.39. Пусть поглощение веществом фотонов с энергией E определяется несколькими независимыми процессами с коэффициентами поглощения $\mu_k(E) = \sigma_k(E) n_k$ ($\sigma_k(E)$ – сечение поглощения, n_k – линейная концентрация, соответствующая k-му процессу, $k=1,\ldots,m$). Найти выражение для вероятности пролета фотоном расстояния x в веществе.

§9. Законы больших чисел

9.1. Доказать, что если случайная величина ξ такова, что $Me^{a\xi}$ существует ($a>0$ постоянная), то

$$P\{\xi \geqslant \varepsilon\} \le Me^{a\xi}/e^{a\varepsilon}.$$

9.2. Пусть $f(x)>0$ – неубывающая функция. Доказать, что если существует $M(f(|\xi - M\xi|))$, то

$$P\{|\xi-M\xi| \geqslant \varepsilon\} \le M(f(|\xi-M\xi|)/f(\varepsilon)).$$

9.3. Показать, что для пуассоновского процесса $N(t)$,

$$P\{N(t)=k\} = \frac{(qt)^k}{k!}e^{-qt}, \quad k=0,1,\ldots,$$

с мощностью $q>0$, имеет место сходимость по вероятности $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{P} q$.

9.4. Выяснить, применим ли закон больших чисел к последовательностям попарно независимых случайных величин ξ_k, $k=1,2,\dots$, с указанными законами распределения вероятностей:

а) $P\{\xi_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2}$;

б) $P\{\xi_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2k^2}$, $P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{1}{k^2}$;

в) $P\{\xi_k = \pm k\} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, $P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$.

9.5. Оценить в условиях теоремы Бернулли и в условиях центральной предельной теоремы необходимое число испытаний n в схеме Бернулли, чтобы для любого $0<p<1$, отклонение частоты успехов от вероятности не превышало $\varepsilon = 0.02$ с вероятностью 0.95.

9.6. Для случайной величины ξ с плотностью распределения $p_\xi(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}$, $x \geq 0$, m – неотрицательное целое число, доказать неравенство $P\{0<\xi<2(m+1)\} > \frac{m}{m+1}$.

9.7. Дана последовательность случайных величин ξ_k, $k=1,2,\dots$, для которых $D\xi_k \leq C$ и коэффициент корреляции $r_{km} \to 0$ при $|k-m| \to \infty$. Доказать, что к данной последовательности применим закон больших чисел (теорема Бернштейна).

§10. Центральные предельные теоремы

10.1. Вычислить характеристические функции для следующих законов распределения:

а) равномерного распределения в интервале $(-a, a)$;

б) биноминального распределения;

в) распределения Пуассона;

г) распределения Коши: $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$;

д) показательных распределений с плотностями

$$p_1(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ ae^{-ax}, & x \geq 0,\ a>0, \end{cases}$$

$p_2(x) = 1/2\, e^{-|x|}$;

е) нормального распределения: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

10.2. Для случайной величины ξ вероятность события $\{\xi=k\}$, $k=0,1,2,\dots$ определяется вероятностью достижения n успехов в схеме $n+k$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Найти закон распределения ξ, $f_\xi(t)$, $M\xi$ и $D\xi$.

10.3. Доказать, что для вещественной характеристической функции справедливы неравенства:

а) $1 - f(nt) \leq n^2(1-f(t))$, $n = 0,1,2,\dots$,

б) $1 + f(2t) \geq 2\{f(t)\}^2$.

10.4. Доказать, что следующие функции не могут быть характеристическими функциями:

а) $e^{-|t|i}$, $\frac{1}{1-|t|i}$;

б) вещественная функция, не обладающая свойством четности;

в) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t|<1 \\ 0, & |t| \geq 1; \end{cases}$

г) $f(t) = \cos(t^2)$.

10.5. Установить, будет ли выполнена центральная предельная теорема для последовательностей взаимно независимых случайных величин ξ_k, $k=1,2,\dots$, с указанными законами распределения вероятностей:

а) $P\{\xi_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2}$;

б) $P\{\xi_k = \pm 2^k\} = 2^{-(2k+1)}$, $P\{\xi_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}$;

в) $P\{\xi_k = \pm k\} = \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}$, $P\{\xi_k = 0\} = 1 - k^{-\frac{1}{2}}$.

10.6. Показать, что функция распределения случайного процесса $\xi(t) = \frac{N(t) - qt}{\sqrt{qt}}$, где $N(t)$ – пуассоновский процесс с мощностью q: $P\{N(t)=k\} = \frac{(qt)^k}{k!}e^{-qt}$, $k=0,1,\dots$ при $t\to\infty$, сходится к функции распределения стандартного нормального процесса.

10.7. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма выпавших очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний? менее 180 бросаний? от 190 до 210 бросаний?

10.8. На улице стоит человек и продает газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей покупает газету с вероятностью 1/3. Пусть ξ означает число людей, прошедших мимо продавца за время, пока он продавал первые 100 экземларов газеты. Оценить плотность распределения ξ .

§II. Конечные однородные цепи Маркова

II.1. Вероятности перехода за один шаг в цепи Маркова задаются матрицей
$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$
Найти:

а) число состояний;

б) за сколько шагов из второго состояния можно перейти в третье;

в) вероятности перехода за два шага.

o II.2. Точка движется по целочисленной прямой, переходя за один шаг из точки i в точку $i-1$ с вероятностью p, в точку i с вероятностью q и в точку $i+1$ с вероятностью r $(p+q+r=1)$. Найти матрицу вероятностей перехода: за один шаг; за два шага.

√II.3. Электрон может находиться на одной из орбит в зависимости от энергии. Переход с i-й орбиты на j-ю происходит за одну секунду с вероятностью
$$C_i \exp(-\alpha|i-j|) \qquad (i,j=1,2,\dots).$$
Найти: а) вероятности перехода за две секунды;

? б) постоянные C_i.

II.4. Рассмотрим цепь Маркова с двумя состояниями E_1 и E_2 с вероятностями перехода $P_{11}=P_{22}=p$, $P_{12}=P_{21}=q$ $(0<p<1,\ p+q=1)$ и начальными вероятностями $P\{\xi_0=E_1\}=\alpha$, $P\{\xi_0=E_2\}=1-\alpha$. Найти $\{P_{ik}^{(n)}\}$, $P_i(n)=P\{\xi_n=E_i\}$ и соответствующие предельные вероятности P_i.

o II.5. Пусть частица случайно блуждает с единичным шагом по бесконечной целочисленной прямой. Найти вероятность перехода из точки 0 в точку m за n шагов, если вероятность того, что из общего числа n шагов вправо сделано K шагов, задается биномиальным законом $P_n(K)$ с параметром $p>0$.

II.6. Пусть ξ_i, $i=1,2,\dots$ – последовательность независимых случайных величин, принимающих значения $K=0,1,2,\dots$ с вероятностями $P_K=P\{\xi_i=K\}=2^{-K-1}$. Вероятности перехода

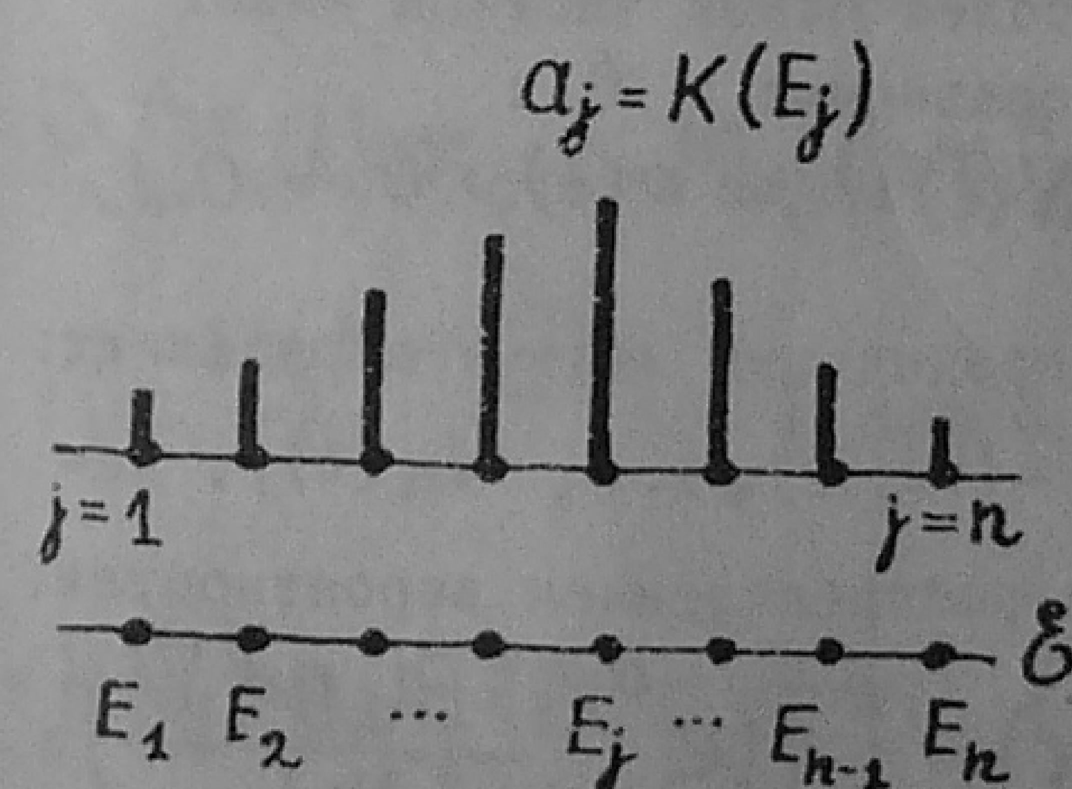
не зависят от номера испытания и равны
$$P_{ij}=P\{\xi_{s+1}=j\,|\,\xi_s=i\}=p_j.$$
Показать, что последовательность величин $\eta_m=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_m$ является марковской, и найти для нее матрицу π_1 вероятностей перехода за один шаг.

√II.7. Пусть $\xi_1,\xi_2,\dots$ – последовательность независимых случайных величин, принимающих значения +I и -I с вероятностями p и $1-p$. Показать, что последовательность величин
$$\eta_m=\frac{\xi_m+\xi_{m+1}}{2}$$
не является марковской.

√II.8. Пусть $\xi_1,\xi_2,\dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения -I и +I, соответственно с вероятностями p и $1-p$. Положим $\zeta_n=\xi_n\cdot\xi_{n+1}$. Будет ли последовательность ζ_n цепью Маркова? Существует ли предел $P\{\zeta_n=1\}$ при $n\to\infty$?

§I2. Случайные процессы

I2.I. Излучение представляет собой парциальные потоки частиц, различающиеся энергией E_j, $\mathcal{E}=\{E_j,\ j=1,\dots,n\}$ – множество значений E_j. Пусть $K(E_j)$ – вещественная функция, определенная на $\mathcal{E}$ так, что $a_j=K(E_j)>0$, $E_j\in\mathcal{E}$, $\sum_{j=1}^{n} a_j=1$.



В модели излучения множество $\mathcal{E}$ – спектр энергий, функция $K(E_j)$ задает распределение на спектре энергий $\mathcal{E}$. Пусть известно, что: а) для случайных величин $N_j(t_\ell)$, равных числу излученных частиц с энергией $E_j\in\mathcal{E}$ в непересекающиеся временные интервалы t^*_ℓ, $\ell=1,\dots,m$ события $\{N_j(t_\ell)=r_{j\ell}\}$ независимы;

б) вероятность излучения частиц с энергией $E_j\in\mathcal{E}$ в интервале длины t не зависит от его расположения на оси времени;

в) вероятность излучения одной частицы с энергией $E_j\in\mathcal{E}$ в интервале времени длины t при $t\to 0$ с точностью

* Временные интервалы и длительности в обозначениях не различаются.

до бесконечно малой более высокого порядка пропорциональна длительности этого интервала, а вероятность излучения более чем одной частицы имеет более высокий порядок малости по сравнению с t, т.е.

$$P(N_j(t)=1)=a_j q t + o(t),$$

$$P(N_j(t)>1)=o(t),\ j=1,\dots,n,\ t\to 0,\ q>0\ -$$

– мощность излучения.

Пусть $(N(t_\ell)=r_\ell)=\bigcup_{j:\sum r_{j\ell}=r_\ell}(N_j(t_\ell)=r_{j\ell})$, $N(t_\ell)$ – полное количество частиц, излученных в промежуток времени t_ℓ.

Показать, что для случайных величин $N(t_\ell),\ \ell=1,\dots,m$ имеет место утверждения:

а) события $(N(t_1)=r_1),\dots,(N(t_m)=r_m)$ независимы;

б) вероятность излучения частицы в интервале времени t не зависят от расположения интервала на оси времени;

в) вероятность излучения одной частицы в достаточно малом интервале времени t пропорциональна длительности этого интервала, а вероятность излучения более одной частицы имеет более высокий порядок малости по сравнению с t:

$$P(N(t)=1)=qt+o(t),\quad P(N(t)>1)=o(t),\quad t\to 0.$$

I2.2. Показать, что условия предыдущей задачи определяют:

I) векторный поток $N(t)=(N_1(t),\dots,N_n(t))$, задаваемый n-мерным пуассоновским распределением вероятностей:

$$P(N_1(t)=r_1,\dots,N_n(t)=r_n)=\prod_{j=1}^{n}\left(e^{-a_j q t}\frac{(a_j q t)^{r_j}}{r_j!}\right)=$$

$$=e^{-qt}\prod_{j=1}^{n}\frac{(a_j q t)^{r_j}}{r_j!},\quad 0\le r_j<\infty,\quad j=1,2,\dots,n;$$

2) полный поток $N(t)=N_1(t)+\dots+N_n(t)$ векторного потока $N(t)$, описываемый пуассоновским распределением вероятностей:

$$P(N(t)=r)=e^{-qt}\frac{(qt)^r}{r!},\quad 0\le r<\infty,\quad q=\sum_{j=1}^{n}a_j q>0.$$

q – мощность потока излучения.

I2.3. Обозначим через $(m(t)=1)$ и $(m(t)=0)$ события, состоящие в излучении и неизлучении частицы радиоактивным атомом за время t. Используя независимость вероятности неизлучения от расположения промежутка t на оси времени и непрерывность производной $\frac{d}{dt}P(m(t)=0)$, доказать, что $p(m(t)=0)=e^{-\lambda t}$, $\lambda>0$.

I2.4. Пусть в условиях задачи I2.3 $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$, T – период полураспада. Полное количество излученных частиц (однородным радиоактивным веществом) к моменту времени t равно $M(t)=\sum m(t)$, где сумма берется по M_0 радиоактивным атомам в начальный момент времени $t=0$. Пусть $a_j=K(E_j)$ – вероятность излучения частицы с энергией $E_j\in\mathcal{E}$, $j=1,\dots,n$, $\sum_{j=1}^{n}a_j=1$. Предположив, что события, связанные с излучением атомов, независимы, получить распределение вероятностей, описывающее векторный поток излучения частиц $M(t)=(M_1(t),\dots,M_n(t))$ и полный поток $M(t)=M_1(t)+\dots+M_n(t)$, где $M_j(t)$ – поток частиц с энергией E_j.

I2.5. Пусть векторный поток излучения $M(t)=(M_1(t),\dots,M_n(t))$ описывается распределением вероятностей:

$$P_n(M_1(t)=r_1,\dots,M_n(t)=r_n)=C_{M_0}^{r_1,\dots,r_n}\prod_{j=1}^{n}\left(a_j(1-e^{-\lambda t})\right)^{r_j}\times$$

$$\times\left(e^{-\lambda t}\right)^{M_0-\sum_{j=1}^{n}r_j},\quad 0\le r_j\le M_0,\quad 0\le\sum_{j=1}^{n}r_j\le M_0,\quad a_j=$$

$$=K(E_j)>0,\ E_j\in\mathcal{E},\ \sum_{j=1}^{n}a_j=1,\quad C_{M_0}^{r_1,\dots,r_n}=\frac{M_0!}{r_1!\dots r_n!(M_0-\sum_{j=1}^{n}r_j)!}.$$

Показать, что парциальные потоки $M_j(t)$, $j=1,\dots,n$ задаются распределением вероятностей

$$P_1(M_j(t)=r)=C_{M_0}^{r}\left(a_j(1-e^{-\lambda t})\right)^{r}\times\left(1-a_j(1-e^{-\lambda t})\right)^{M_0-r},\quad 0\le r\le M_0$$

и что любые пары парциальных потоков $M_i(t),M_j(t)$, $i\ne j$, $i,j=1,\dots,n$ задаются распределением вероятностей

$$P_2(M_i(t)=r_i,M_j(t)=r_j)=C_{M_0}^{r_i,r_j}\left(a_i(1-e^{-\lambda t})\right)^{r_i}\times$$

$$\times\left(a_j(1-e^{-\lambda t})\right)^{r_j}\times\left(1-(a_i+a_j)(1-e^{-\lambda t})\right)^{M_0-r_i-r_j},$$

$0 \le r_i \le M_0, \ 0 \le r_j \le M_0, \ 0 \le r_i + r_j \le M_0,$

$$C_{M_0}^{r_i, r_j} = \frac{M_0!}{r_i! \, r_j! \, (M_0 - r_i - r_j)!} .$$

I2.6. Рассчитать характеристическую функцию пуассоновского распределения векторного потока излучения $N(t)$ и полного потока $N(t)$ (задача I2.2), характеристическую функцию распределения векторного потока $M(t)$ радиоактивного распада и полного потока $M(t)$ с тем же распределением по спектру энергий, что и $N(t)$ (задача I2.4). Показать, что имеет место сходимость по распределению: $M(t) \to N(t)$, $M(t) \to N(t)$ при $M_0 \to \infty, \lambda \to 0$ так, что $M_0 \lambda = q = const$ – мощность излучения.

I2.7. Для пуассоновского векторного потока излучения $N(t) = (N_1(t), \ldots, N_n(t))$ с распределением по спектру энергий $a_j = K(E_j) > 0, E_j \in \mathcal{E}, \sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ и мощностью q найти среднее $\overline{N_j(t)}$, дисперсию $\mathcal{D} N_j(t)$ и мощности усредненных парциальных излучений $\frac{d \overline{N_j(t)}}{dt}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$

I2.8. Для векторного потока излучения радиоактивного распада $M(t) = (M_1(t), \ldots, M_n(t))$ (задача I2.4) найти среднее $\overline{M_j(t)}$, дисперсию $\mathcal{D} M_j(t)$, $\frac{d M_j(t)}{dt}$ и $cov(M_i(t), M_j(t))$, $i \ne j, \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$

I2.9. Пусть на мишень падает векторный поток частиц $N(t) = (N_1(t), \ldots, N_n(t))$ с заданным распределением вероятностей $p(N_1(t) = r_1, \ldots, N_n(t) = r_n) = p(r_1, \ldots, r_n, t), \ (r_1, \ldots, r_n) \in \mathcal{R}$. Мишень пропускает частицы с энергией $E_j \in \mathcal{E}$ с вероятностью $p_j = p(E_j), \ j = 1, \ldots, n$. Найти распределение вероятностей векторного потока излучения, прошедшего через мишень. Найти распределение вероятностей суммарного потока излучения, прошедшего через мишень в случае пуассоновской модели и в случае модели радиоактивного распада (см. задачи I2.2 и I2.4).

I2.10. Пусть в задаче I2.9 частицы за мишенью регистрируются детектором в определенном телесном угле Ω. Предполагая, что источник излучения изотропный и что частицы фиксируются детектором с вероятностью ω, найти вероятность того, что детектор за время t зарегистрирует r частиц.

I2.11. Измерение излучения осуществляется до накопления определенного суммарного количества частиц $N(t) = r$. Показать, что вклады парциальных потоков в случае пуассоновской модели излучения и модели излучения радиоактивного распада с распределением по спектру энергий $a_j = K(E_j) > 0, \ E_j \in \mathcal{E}$, $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ описываются распределением вероятностей

$$P(N_1 = r_1, \ldots, N_n(t) = r_n) = \frac{r!}{r_1! \ldots r_n!} a_1^{r_1} \ldots a_n^{r_n}, \ \sum_{j=1}^{n} r_j = r.$$

I2.12. Для пуассоновского процесса $N(t): P\{N(t) = k\} = \frac{(qt)^k}{k!} e^{-qt}, \ k = 0, 1, \ldots$, начинающегося в нуле $P\{N(0) = 0\} = 1$, случайный момент τ_M достижения целой положительной величины M определяется из $P\{\tau_M < t\} = P\{N(t) \ge M\}$. Найти плотность распределения τ_M и среднее значение $\overline{\tau_M}$.

I2.13. Рассмотрим два независимых пуассоновских процесса, начинающихся в нуле:

$$P\{N_i(t) = k\} = \frac{(q_i t)^k}{k!} e^{-q_i t}, \ k = 0, 1, \ldots, \quad P\{N_i(0) = 0\} = 1, \ i = 0, 1.$$

Найти распределение вероятностей случайной величины $\xi = N_1(\tau_M)$, где τ_M – случайный момент, определяемый из $P\{\tau_M < t\} = P\{N_0(t) \ge M\}$.

I2.14. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, рассмотренной в предыдущей задаче.

I2.15. Пусть ξ_n – сумма n независимых случайных величин ξ, одинаково распределенных по закону, полученному в задаче I2.13. Найти распределение ξ_n и относительную точность: $\sqrt{\mathcal{D}\xi_n} / M\xi_n$.

I2.16. Показать, что из среднеквадратичной непрерывности процесса в точке t_0: $\lim\limits_{t \to t_0} M|\xi(t) - \xi(t_0)|^2 = 0$ вытекает стохастическая непрерывность процесса в точке t_0, т.е.

$$\lim_{t \to t_0} P\{|\xi(t) - \xi(t_0)| > \varepsilon\} = 0, \ \varepsilon > 0.$$

I2.17. Показать, что пуассоновский процесс и процесс радиоактивного распада стохастически непрерывны в точках $t>0$.

I2.I8. Гильбертов случайный процесс $\{\xi(t),\ t\in(a,b)\}$, $-\infty<a<b<+\infty$ дифференцируем в среднеквадратичном в точке t_0, если существует

$$\xi'(t_0)=\underset{h\to 0}{l.i.m.}\frac{\xi(t_0+h)-\xi(t_0)}{h},\quad t_0,\,t_0+h\in(a,b).$$

Случайная величина $\xi'(t_0)$ называется среднеквадратичной производной случайного процесса $\xi(t)$ в точке t_0. Показать, что $M\xi'(t)=\frac{d}{dt}M\xi(t)$ и производная справа существует.

I2.I9. Доказать, что у нормального стационарного марковского процесса корреляционная функция равна $R(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha>0$ (теорема Дуба).

I2.20. Найти распределение случайной величины:

$$\xi(t)=\max_{0<\tau<t}\xi(\tau),$$

где $\xi(\tau)$ – координата броуновской частицы, при $\tau=0$ находившейся в начале координат.

I2.2I. Найти распределение случайной величины $s(t)$, где s – момент достижения броуновской частицы максимальной координаты в интервале $(0,t)$: $\xi(s)=\max_{0<\tau<t}\xi(\tau)$.

§I3. Распределение ортогональных проекций. Понятие о задаче статистической проверки гипотез

I3.I. С I87I по I900 гг. в Швейцарии родилось I 359 67I мальчиков и I 285 086 девочек. Используя критерий 3σ проверить две гипотезы: первая – вероятность рождения мальчика равна 0.5I5, вторая – вероятность рождения мальчика равна 0.5.

I3.2. Стальная проволока выдерживает в среднем растягивающее усилие $\mu=6720$ кг/см^2. Стандартное уклонение* σ отдельных образцов от этого среднего равно 220 кг/см^2. Известно, что в отношении растягивающих усилий x_i, выдерживаемых отдельными образцами проволоки, имеет место нормальный закон распределения. Результаты испытаний двух партий проволоки

* Стандартное уклонение – то же, что среднеквадратичное уклонение. Термин употребляется в математической статистике.

даются в таблице:

I-я партия $(x_i^{(1)})$		2-я партия $(x_i^{(2)})$	
6300	6900	7I50	7280
6870	7I30	6950	7I20
6720	6690	7230	6690
6980	6750	7240	7070
6780	6560	7090	6950
6780	6700	6800	6590
6780	6930	7000	6890
6720	6720	7070	69I0
6630	6950	6700	6630
6660	6960	7I40	7220

Возможно ли на основании этих испытаний утверждать, что обе партии проволоки требуемого качества и результаты испытаний следует объяснить случайностью выборки? Воспользоваться критерием 3σ.

I3.3. Известно, что определенный сплав не поддается коррозии в среднем в течение 875 дней со стандартным уклонением, равным 85 дням. Указать, какое количество листов данного сплава должно быть подвергнуто испытанию, чтобы с вероятностью 0.90 ожидать величину уклонения от средней не больше, чем на 5%.

I3.4. Приводимая ниже таблица дает среднюю длину x_0 яйца кукушки вообще, среднюю длину x_i яйца кукушки, положенного в гнездо определенного вида птиц и ошибки измерений в виде оценок стандартных уклонений. Измерения производились с целью обнаружить разницу в размерах яиц, опускаемых кукушкой в гнезда различного вида птиц.

Стложенные яйца	Число измерений (n_0, n_i)	Средняя длина в мм (x_0, x_i)	Стандартное уклонение (σ_0, σ_i)
Вообще	I572	22.3	0.96
I-й вид	9I	2I.9	0.79
2-й вид	II5	22.4	0.76
3-й вид	58	22.6	0.86

Используя распределение Стьюдента, проверить на уровне значимости $\alpha=0.1\%$ гипотезу о том, что разница в длине размеров яиц кукушки от птиц i-го вида носит случайный характер, $i=1,2,3$.

I3.5. Чтобы проверить, оказывает ли влияние на прочность бетона особый способ его приготовления, были взяты 6 выборок, разделены случайным образом на две группы и из каждой выборки был сделан пробный куб, причем выборки из группы II подвергались особой обработке. После готовности кубов определили их сопротивление на сжатие, получив следующие результаты опыта:

Бетон I	290	3II	284
Бетон II...........	309	3I8	3I8

Используя распределение Стьюдента, проверить на уровне значимости $\alpha = 5\%$ гипотезу о том, что бетон обеих групп одинаково прочен.

I3.6. Были взяты I6 клубней картофеля и к каждому клубню были применены два метода измерения содержания крахмала. В таблице даны численные результаты - разности между процентом содержания крахмала, определенного I и II методами.

№	Разности	№	Разности
I	0.2	9	0.I
2	0.0	I0	0.2
3	0.0	II	0.3
4	0.I	I2	0.0
5	0.2	I3	-0.I
6	0.2	I4	0.I
7	0.3	I5	-0.2
8	-0.3	I6	0.I

С помощью критерия Стьюдента проверить гипотезу о том, что оба метода не дают систематического различия в определении процентного содержания крахмала. Принять $\alpha = 0.05$.

I3.7. Для того чтобы исследовать эффект использования специальной сеялки, десять участков земли были засеяны при помощи обыкновенной сеялки и десять соседних с ними участков земли были засеяны при помощи специальной сеялки. Затем сравнивались полученные урожаи зерна, причем пару составляли два соседних участка.

№ пары	Специальная сеялка	Обыкновенная сеялка	Разница в урожае
I	8.0	5.6	2.4
2	8.4	7.4	I.0
3	8.0	7.3	0.7
4	6.4	6.4.	0.0
5	8.6	7.5	I.I
6	7.7	6.I	I.6
7	7.7	6.6	I.I
8	5.6	6.0	-0.4
9	5.6	5.5	0.I
I0	6.2	5.5	0.7

С помощью критерия Стьюдента на уровне значимости $\alpha = 5\%$, проверить гипотезу о том, что специальная сеялка не увеличивает урожай, двумя различными способами, определяя:

а) отличия от нуля разности урожаев;

б) различия среднего урожая на полях, обработанных специальной сеялкой, и урожая на полях, обработанных обычной сеялкой.

Объяснить, почему получились разные результаты.

I3.8. В процессе производства электрические счетчики с вращающимся диском были отрегулированы для того, чтобы синхронизировать их работу со стандартным счетчиком. Проверка I0 счетчиков, заключающаяся в определении их постоянной с помощью точных ваттметров и секундомеров, показала следующие результаты:

Счетчики	x	Счетчики	x
I	0.983	6	0.983
2	I.002	7	0.994
3	0.998	8	0.99I
4	0.996	9	I.005
5	I.002	I0	0.986

Причем постоянная, характеризующая стандартный счетчик, взята равной I.0000. Можно ли отклонения от стандарта рассматривать как случайные или, напротив, результаты указывают на то, что постоянные отрегулированных счетчиков систематически отклоняются от постоянной стандартного счетчика? Ответить на этот вопрос, проверив гипотезу о том, что десять измерений образуют случайную выборку, извлеченную из нормально распределенной генеральной совокупности со средним $\xi_0 = 1.0000$. Принять α равным 0.05 и равным 0.02.

I3.9. Во время второй мировой войны на Лондон упало 537 самолетов-снарядов. Вся территория Лондона была разделена на 576 участков площадью по 0.25 км^2. Ниже приведены числа участков n_k, на которые упало k самолетов-снарядов:

k	0	1	2	3	4	5
n_k	229	211	93	35	7	1

Противоречат ли эти данные гипотезе о том, что число снарядов, упавших на каждый из участков, имеет распределение Пуассона? Принять $\alpha = 0.05$.

13.10. По официальным данным шведской статистики в Швеции в 1935 г. родилось 88 273 ребенка, причем в январе родилось 7280 человек, в феврале - 6957, в марте - 7883, в апреле - 7884, в мае - 7892, в июне - 7609, в июле - 7585, в августе - 7393, в сентябре - 7203, в октябре - 6903, в ноябре - 6552, в декабре - 7132 человека. Используя критерий χ^2, проверить, совместимы ли эти данные с гипотезой о том, что день рождения наудачу выбранного человека с равной вероятностью приходится на любой из 365 дней года. Принять $\alpha = 0.1\%$.

13.11. Найти критическое множество для проверки гипотезы H_0 о распределении случайной величины ξ с плотностью вероятностей

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/2, & |x|<1, \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases}$$

против альтернативной гипотезы H_1, предполагающей нормальное распределение случайной величины ξ при $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, если для проверки гипотез используются результаты одного наблюдения. Вычислить мощность полученного критерия. Уровень значимости α принять равным 0.05.

13.12. Случайная величина X имеет нормальное распределение $N(0,1)$. Определить критическое множество для проверки гипотезы $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$, используя выборку n наблюдений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ этой случайной величины, уровень значимости α задан.

13.13. Случайная величина X имеет нормальное распределение $N(\mu,1)$. Проверяется гипотеза $H_0 : \mu = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \mu = 1$ на уровне значимости $\alpha = 0.05$. Сколько наблюдений необходимо, чтобы мощность критерия была не меньше 0.90?

§14. Интервальные оценки параметров нормального распределения

14.1. 7 независимых равноточных измерений жесткости вала дали результаты: 6.54; 6.38; 6.44; 6.51; 6.35; 6.47;

6.59. Найти интервальную оценку для математического ожидания жесткости, отвечающую уровню доверия 95%, считая ошибки измерения нормальными.

14.2. В результате 100 испытаний обнаружено, что в среднем срок службы детали составляет 10000 ч при среднеквадратичном отклонении 15ч. Найти вероятность того, что абсолютная ошибка в определении математического ожидания будет меньше 5 ч и дисперсии - меньше 1 ч, считая, что срок службы детали - нормальная случайная величина.

14.3. 8 независимых равноточных измерений коэффициента вязкости дали результаты: 2.12; 2.34; 2.18; 2.25; 2.31; 2.27; 2.19; 2.33. Найти интервальную оценку для дисперсии коэффициента вязкости, отвечающую уровню доверия 90%, считая ошибки измерения нормальными.

14.4. В результате 50 испытаний обнаружено, что в среднем на подготовку выстрела уходит 5 с при среднеквадратичном уклонении 1.2 с. Построить интервальные оценки для математического ожидания и дисперсии, отвечающие уровню доверия 90%, считая, что время для подготовки выстрела - нормальная случайная величина.

§15. Точечные оценки

15.1. Пусть x - число успехов в n независимых испытаниях Бернулли, p - вероятность успеха в одном испытании. Пользуясь методом наибольшего правдоподобия оценить параметр p. Показать, что полученная оценка является несмещенной и состоятельной.

15.2. По выборке $k_1, \ldots, k_n$ объема n методом наибольшего правдоподобия оценить параметр распределения Пуассона. Показать, что полученная оценка является несмещенной и состоятельной.

? 15.3. n независимых измерений $x_1, \ldots, x_n$ величины μ получены при помощи n различных приборов. В предположении, что $x_i \in N(\mu, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, по измерениям $x_1, \ldots, x_n$ методом наибольшего правдоподобия найти оценку μ. Показать, что полученная оценка является несмещенной, и вычислить ее дисперсию.

? 15.4. При измерении давления были получены следующие результаты: 3.12; 3.1; 2.9; 2.85; 3.17; 2.97; 3.08. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии давления.

15.5. Пусть ξ_i, $i=1,\dots,n$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией. Показать, что для любой оценки среднего $\bar{M}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i$, $\alpha_i>0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ имеет место

$$\mathcal{D}\bar{M}\geq\mathcal{D}\hat{M}=\mathcal{D}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big),$$

причем равенство достигается лишь при $\alpha_i=1/n$, $i=1,\dots,n$.

15.6. Известно, что статистика $\theta_1=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\hat{\mu})^2$, где $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, $\xi_i\in\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $i=1,\dots,n$, является несмещенной оценкой с минимальной дисперсией параметра σ^2 при неизвестном μ. Показать, что для смещенной оценки $\theta_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\hat{\mu})^2$ параметра σ^2 справедливо неравенство

$$M(\theta_1-\sigma^2)^2-M(\theta_2-\sigma^2)^2=\frac{1}{n^2}\,\frac{n+1}{n-1}\,\sigma^4>0.$$

15.7. Пусть ξ – выборка объема 1 из пуассоновского распределения $P\{\xi=k\}=\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$, $k=0,1,\dots$. Показать, что не существует несмещенной оценки для $\tau(\theta)=1/\theta$.

15.8. Выборочные значения x_i, $i=1,\dots,n$ описываются равномерным на интервале $(0,a)$ распределением. Методом наибольшего правдоподобия найти оценку параметра a и показать ее достаточность.

15.9. Показать, что суммарное количество частиц $N(t)$ в пуассоновской модели излучения и суммарное количество частиц $M(t)$ в модели излучения радиоактивного распада с распределением по спектру энергий $a_j=K(E_j)>0$, $E_j\in\mathcal{E}$, $\sum_{j=1}^{n}a_j=1$ являются достаточными статистиками относительно параметров распределений q,t и M_0,λ,t (см. задачи 12.2 и 12.4).

§16. Линейный анализ регрессий

16.1. Пусть α_1 и α_2 – истинные веса двух предметов и пусть (абсол.) ошибки δ_i взвешивания случайны, независимы, имеют $M\delta_i=0$ и $\mathcal{D}\delta_i=\sigma^2$, $i=1,2,\dots$. Найти оценки весов α_1 и α_2 и их дисперсии для каждой из трех стратегий взвешивания:

1) $\xi_1=\alpha_1+\delta_1$, $\xi_2=\alpha_2+\delta_2$; 2) $\xi_1=\alpha_1+\delta_1$, $\xi_2=\alpha_2+\delta_2$, $\xi_3=\alpha_1+\alpha_2+\delta_3$; 3) $\xi_1=\alpha_1+\alpha_2+\delta_1$, $\xi_2=\alpha_1-\alpha_2+\delta_2$.

Какая из стратегий предпочтительнее ?

16.2. Инструментом длины стержней измеряются без систематического отклонения с дисперсией σ^2. Для оценивания длин двух стержней разрешается произвести всего два измерения. Указать способ оценивания длин стержней, который по сравнению с обычным измерением – отдельное измерение каждого стержня – дает более высокую точность оценивания длин стержней.

16.3. Тело двигается по закону $h(t)=h_0+vt+at^2/2$. Оценить параметры h_0, v, a согласно измерениям в моменты времени $t=1,\dots,6$ с: $h(1)=100$, $h(2)=95$, $h(3)=86$, $h(4)=70$, $h(5)=44$, $h(6)=8$ м. Определить точность оценок h_0, v, a.

16.4. В предположении, что все δ_i независимы и одинаково распределены с $M\delta_i=0$ и $\mathcal{D}\delta_i=\sigma^2$, $i=1,2,3,4$, найти из результатов измерений

$$0.15=a-3b+\delta_1,\qquad 2.07=a-b+\delta_2,$$
$$4.31=a+b+\delta_3,\qquad 6.39=a+3b+\delta_4.$$

оценки для коэффициентов a, b и σ^2 методом наименьших квадратов.

16.5. В задаче 16.4 принять, что $\delta_i\in\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ и найти доверительные интервалы для a, b и σ^2, а также доверительный эллипс для точки (a,b) с коэффициентом доверия 0.95.

16.6. Используя результат теоремы Гаусса – Маркова для модели измерений

$$\bar{\xi}=\sum_{\lambda=1}^{K}\bar{a}_\lambda\alpha_\lambda+\bar{\delta},\ \bar{\delta}=(\delta_1,\dots,\delta_n),\ M\delta_i=0,\ \mathrm{cov}\,\delta_i\delta_j=\delta_{ij}\sigma^2,\ i,j=1,\dots,n,$$

где $K\leq n$, $\bar{a}_\lambda$, $\lambda=1,\dots,K$ линейно независимые векторы, найти несмещенную оценку с минимальной дисперсией $\hat{\gamma}$ для величины $\gamma=\sum_{\lambda=1}^{K}C_\lambda\alpha_\lambda$, а также дисперсию $\mathcal{D}\hat{\gamma}$, C_λ – заданные числа.

3х-1097

16.7. Точка движется равномерно и прямолинейно. В моменты времени $t = 0, 1, 2, 3, 4$ зафиксированы следующие значения ее координат $S_t = S_0 + vt + \delta_t$ (S_0 – координата точки в момент $t = 0$, v – скорость) : 12.98; 13.05; 13.97; 14.22. Предполагая для ошибок измерений δ_t $M\delta_t = 0$, $cov\,\delta_t\delta_{t'} = \sigma^2\delta_{tt'}$, найти несмещенные оценки с минимальными дисперсиями для S_0 и v.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ

1.1. $B = \bigcup\limits_1^6 A_k = A_6$, $C = \bigcap\limits_1^{10} A_k = A_1$, D – попадание в концентрическое кольцо с радиусами r_5 и r_6, E – попадание в концентрическое кольцо с радиусами r_1 и r_2.

1.4. а) $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = C_a$,

б) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bar{C}_a$,

в) это событие можно записать в виде объединения непересекающихся событий: $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n + \bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \ldots$
$\ldots \cap \bar{A}_n + \ldots + \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n = C_b$,

г) либо детали не имеют дефектов, либо имеет дефект одна деталь, либо две: $C_a + C_b + C_e$,

д) не имеют дефекты две детали или больше, чем две детали: $A_1 \cap \ldots \cap A_n + \bar{A}_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n + \ldots + A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap \bar{A}_n$

е) точно два изделия дефектны $A_1 \cap A_2 \cap \overline{(A_3 \cap A_4 \ldots \cap A_n)} + \ldots = C_e$.

1.5. $P(A \circ B) = 2r - p - q$, $P(A \cap B) = r - q$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - r$.

2.1. Пространство элементарных событий: (ГГ), (РР), (РГГ), (ГРР), ..., $\sum P\{$эл. событие$\} = 1$, где Г – выпадение герба, Р – выпадение решки, а) 15/16, б) 2/3.

2.2. Искомая вероятность равна $C_7^5 \cdot 5!/7^5 \approx 0.15$.

2.3. Пространство элементарных событий состоит из всех сочетаний по 6 карт из 52-х.

1) $\dfrac{C_1^1 C_{51}^5}{C_{52}^6}$; 2) $\left\{C_4^1 (C_{13}^1)^3 (C_{13}^3) + C_4^2 (C_{13}^1)^2 (C_{13}^2)^2\right\} / C_{52}^6$,

3) n определяется из условия $1 - \dfrac{4^n C_{13}^n}{C_{52}^n} > 0.5$, $n = 6$.

2.4. а) $P = \dfrac{1}{n-1}$; б) $P = \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$; в) $P = \dfrac{1}{n}$, $P = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

2.5. $P = \dfrac{C_{k-1}^{1}\, C_{n-k}^{1}}{C_n^2}$.

2.6. $P = 1 - C_{n-m}^{k}/C_n^k$. 2.7. $P = \dfrac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, $n-m \le N-M$.

2.8. а) $P = C_n^{2r}\cdot 2^{2r}/C_{2n}^{2r}$; б) $P = n\cdot 2^{2r-2}\, C_{n-1}^{2r-2}/C_{2n}^{2r}$;

в) $P = C_n^2\, 2^{2r-4}\, C_{n-2}^{2r-4}/C_{2n}^{2r}$.

2.9. $P = \left(C_{2N}^N\right)^2/C_{4N}^{2N} \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi N}}$.

2.10. а) $\dfrac{1}{(2n-1)!!}$; б) $\dfrac{n!}{(2n-1)!!}$.

2.11. Вероятности равны: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.52$; $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49$.

2.12. Воспользуйтесь формулой Стирлинга.

2.13. $P = 1/C_{n+r-1}^{r}$. 2.14. $P = 1/C_n^r$.

2.16. а) $\dfrac{r!}{k_1!\ldots k_n!}\,\dfrac{1}{n^r}$; б) $\dfrac{n!}{n^n}$; в) $\dfrac{n!\,C_n^2}{n^n}$.

2.17. а) $1-(1-z)^2$; б) $z(1-\ln z)$; в) $1-(1-z)^2$; г) z^2;

д) $P = \begin{cases} 1-2(1-z)^2, & 0.5 \le z < 1, \\ 2z^2, & 0 < z < 0.5. \end{cases}$

2.18. а) $(a-2r)^2/a^2$; б) $1-4\dfrac{r^2}{a^2}$. 2.19. $1-\left(1-\dfrac{t}{T}\right)^2$.

2.20. а) $\dfrac{1}{12}$; б) 0.

2.21. Если $\dfrac{k}{\ell} \ge \operatorname{tg} y \ge \dfrac{x}{\ell}$, $0 \le x \le k$, то $P = \dfrac{x^2 \operatorname{ctg} y + 2x(\ell - x\operatorname{ctg} y)}{\ell k}$;

если $0 \le \operatorname{tg} y \le \dfrac{x}{\ell}$, $0 \le x \le k$, то $P = \dfrac{\ell}{k}\operatorname{tg} y$,

если x, y – любые другие, то $P = 0$.

2.22. 1/4.

2.23. 1) $P = \left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^3\right)^N$. 2) $P = e^{-r^3\frac{4}{3}\pi\lambda}$.

2.24. Пусть $\gamma = \min\{n, M\}$. Искомая вероятность $P =$

$$= \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m} + C_M^{m+1} C_{N-M}^{n-m-1} + \ldots + C_M^{\gamma} C_{N-M}^{n-\gamma}}{C_N^n} \xrightarrow[M/N=\alpha]{M,\,N\to\infty} \sum_{k=m}^{n} C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}.$$

2.25. $(1-m/n)^k$, $(1-0.01)^{100} \approx 0.366$.

2.26. $P = \dfrac{C_4^n \sum\limits_{k=0}^{4-n} C_{4-n}^{k}\, 2^k\, C_{44}^{13-k-2n}}{C_{52}^{13}}$.

3.1. $\dfrac{20}{25}\,\dfrac{19}{24}\,\dfrac{18}{23} = C_{20}^3/C_{25}^3$.

3.2. а) $1-q_1q_2q_3$; б) $1-(1-p_1p_2p_3)(1-p_4p_5p_6)$;

в) $p_2p_4(1-q_2q_3)$; г) $(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)$;

д) $p_5(1-q_1q_2)(1-q_3q_4) + q_5(p_1p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3p_4)$.

3.3. $P = 1-(3/4)^3$.

3.4. $\dfrac{0.2}{0.38} > 0.5$, т.е. вероятнее, что C попал в мишень.

3.5. $P(М|Д) = \dfrac{20}{21}$.

3.6. $P(A|Бр.) = 25/69$, $P(B|Бр.) = 28/69$, $P(C|Бр.) = 16/69$.

3.7. 11/17. 3.8. $P = p/(8-7p)$. 3.9. C_5^2/C_6^3.

3.10. $P = \left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^9\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{6}\right)\right]/\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right]$.

3.11. $P = 0.5$. 3.12. $\dfrac{p}{p-\varepsilon} \ge P(A|B) \ge \dfrac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

3.13. $\min\{P(A), P(B)\} = 0$. 3.14. $P = 0.5$.

3.15. Оба жюри имеют одинаковую вероятность вынести правильное решение.

3.16. $P(Б) = 0.52$. 3.17. 1) 2 – черных и 3 – белых.
2) P = 42/125.

3.18. Одинакова.

3.19. $P = \dfrac{m-2}{m+n-2}$.

3.20. а) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}) = 1 -$
$- P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = 1-(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)$;

б) $(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)$;

в) $A = A_1\cap\bar A_2\cap\dots\cap\bar A_n + \bar A_1\cap A_2\cap\bar A_3\cap\dots\cap\bar A_n+\dots+$
$+\bar A_1\cap\bar A_2\cap\dots\cap A_n$,

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n} p_j\prod_{i\ne j}(1-p_i).$$

3.21. $P_n = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\dots(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\xrightarrow[n\to\infty]{}1-e^{-1}$.

3.22. $p_j(t)=\alpha_j(1-e^{-\lambda t})$.

4.1. $P=C_N^{N_1}\left(\frac{V_1}{V}\right)^{N_1}\left(1-\frac{V_1}{V}\right)^{N-N_1}$, $0\le N_1\le N$.

4.2. $N=15000$.

4.3. Вероятность поражения цели равна $1-(1-p+pq)^n$.

4.4. $p=\frac{(\lambda p)^\ell}{\ell!}e^{-\lambda p}$, $\ell\ge0$.

4.6. Искомая вероятность равна $C_n^m p_1^m(1-p_1)^{n-m}$, где
$p_1=(1-p)\frac{M}{N}+q\frac{N-M}{N}$.

4.8. Воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

4.9. $1-(1-p)^2$. 4.10. $(1-p)^4$.

5.1. $p=0.006$, $n=1000$, $\lambda=np=6$, $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{6^k}{k!}e^{-6}\approx$
≈0.138, $\sum_{k=0}^{16}\frac{6^k}{k!}e^{-6}\approx1$, $\frac{6^6}{6!}e^{-6}\approx0.161$.

5.2. $\lambda=50/500=0.1$, $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(0.1)^k}{k!}e^{-0.1}\approx0.000155$.

5.3. 1) а) $p\approx0.135$; б) $p\approx0.677$. 2) $n=105$.
5.4. 5.

5.5. $\sum_{k=11}^{\infty}\frac{3^k}{k!}e^{-3}\approx0.0003$, $e^{-3}\approx0.0497$, $\frac{3^3}{3!}e^{-3}\approx0.224$.

5.6. 107000. 5.7. $p\approx1$.

5.8. $p=1/365$, $n=200$, $\lambda=np\approx0.548$, $p(k,\ell)=$
$=\frac{\lambda^{k+\ell}}{k!\ell!}e^{-2\lambda}$, $p(1,2)\approx0.0275$, $2\cdot p(2,0)+p(1,1)+$
$+2p(1,0)+p(0,0)=e^{-2\lambda}(2\lambda^2+2\lambda+1)\approx0.901$.

6.1. $P=\Phi(-3)=0.0013$.

6.2. а) $p\approx0.0000$; б) $p\approx0.5$; $p\approx0.995$.

6.3. Предположив, что вероятность совпадения 1/2, получим, что вероятность каждого отклонения большего, чем полученное в эксперименте, равна 0.456. Полученный результат не противоречит случайному совпадению.

6.4. Если зрители приходят парами, то число мест в гардеробе равно 558, по одиночке – 541.

7.1. а) $P(\zeta_1<z)=\begin{cases}0, & z\le0,\\ z/2, & 0<z\le1,\\ 1/2+(z-1)/2, & 1<z\le2,\\ 1, & z>2;\end{cases}$

б) $P(\zeta_2<z)=\begin{cases}0, & z\le0,\\ z/2, & 0<z\le1,\\ 1/2+(z-1)/2, & 1<z\le3/2,\\ 1, & z>3/2;\end{cases}$

в) $P(\zeta_3<z)=\begin{cases}0, & z\le0,\\ 1/2+z/2, & 0<z\le1,\\ 1, & 1<z.\end{cases}$

7.2. $P\{\xi+\eta<z\}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}F(z-x)\,dx$.

7.3. а) $p_\eta(y)=p\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$, $a\ne0$;

б) $p_\eta(y)=p\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}$, $y\ne0$;

в) $p_\eta(y)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\{p(\arccos y+2\pi k)+$
$+p(-\arccos y+2\pi k)\}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $|y|<1$;

г) $p_\eta(y)=p(\psi(y))\cdot|\psi'_y|$, $x=\psi(y)=f^{-1}(y)$.

7.4. а) $p_\zeta(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, $x>0$;

б) $p_\zeta(x)=\begin{cases}0.5, & 0<x<1,\\ 1/(2x^2), & x>1,\end{cases}$ $p_\zeta(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

7.5. $P(\xi_1=k_1|\xi_1+\xi_2=N)=C_N^{k_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{N-k_1}, \quad 0\le k_1\le N.$

7.7. а) $\zeta=\max(\xi,\eta)$. Плотность $r_\zeta(z)=$

$$=p(z)\int_{-\infty}^{z} q(y)\,dy + q(z)\int_{-\infty}^{z}p(x)\,dx,$$

б) $\zeta=\min(\xi,\eta)$. Плотность $r_\zeta(z)=$

$$=p(z)\left(1-\int_{-\infty}^{z} q(y)\,dy\right)+q(z)\left(1-\int_{-\infty}^{z} p(x)\,dx\right).$$

7.8. а) $r_\zeta(x)=\begin{cases}0, & x\le1,\\ 1/2(x-1/2), & 1<x\le2,\\ 1/2, & 2<x\le3,\\ 0, & x>3;\end{cases}$ б) $r_\zeta(x)=\begin{cases}0, & x\le0,\\ 1/2, & 0<x\le1,\\ -x/2+5/4, & 1<x\le2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

7.14. $P_\gamma(y)=\frac{F^2}{(y-F)^2}P_x\left(\frac{Fy}{y-F}\right)$, в частном случае

$$P_\gamma(y)=\begin{cases}\frac{F}{(y-F)^2}, & \frac{5}{3}F\le y\le3F\\ 0, & y<\frac{5}{3}F,\ y>3F.\end{cases}$$

7.15. $P = 1/2$.

7.18. Искомая вероятность $P=1-P_{эм}$, где $P_{эм}=$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\exp(\sigma(E)n)\right)f\,\frac{2}{\pi\Gamma_s}\,\frac{dE}{1-((E-E_0)/0.5\Gamma_s)^2}$$ есть

(полная) вероятность эффекта Мессбауэра.

8.1. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le0,\\ \sum\limits_{k<x}\frac{1}{2^k}, & x>0\end{cases}$; 3 бросания.

8.2. а) $M\zeta_1=0$, $D\zeta_1=1$; б) $M\zeta_2=3$, $D\zeta_2=3$.

8.3. 10 рыб.

8.4. $M\xi=\frac{7}{2}n$, $D\xi=\frac{35}{12}n$, 0.

8.5. 7 очков.

8.6. $w(v_x)=\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{1/2}e^{-\frac{mv_x^2}{2\theta}}, \quad -\infty<v_x<+\infty;$

$$w(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2\theta}}v^2, \quad v\ge0;$$

$$w(\vec{p})=w(p_x,p_y,p_z)=\left(\frac{1}{2\pi m\theta}\right)^{3/2}e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m\theta}}, \quad -\infty<p_x,p_y,p_z<+\infty.$$

$$w(\varepsilon)=2\pi\left(\frac{1}{\pi\theta}\right)^{3/2}e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}\sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon\ge0.$$

8.7. $\overline{v_x}=0,\ \overline{v_x^2}=\frac{\theta}{m},\ \overline{v}=\left(\frac{8}{\pi}\frac{\theta}{m}\right)^{1/2};$

$$\overline{v^2}=\overline{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}=3\overline{v_x^2}=3\frac{\theta}{m},$$

$$\overline{\varepsilon}=\frac{3}{2}\theta,\ \overline{\varepsilon^2}=\frac{15}{4}\theta^2.$$

8.8. $w(v,\vartheta,\varphi)\,dv\,d\vartheta\,d\varphi=\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2\theta}}v^3\times$

$\times\cos\vartheta\sin\vartheta\,dv\,d\vartheta\,d\varphi.$

8.9. Искомая вероятность равна $q^4+4pq^3+2p^2q^2$;

порог протекания равен $\frac{q^4+3pq^3+p^2q^2}{q^4+4pq^3+2p^2q^2}$.

8.10. $M\xi=\sum_{k=1}^{N}k\left[\left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n-\left(\frac{N-k}{N}\right)^n\right].$

8.11. $\frac{1-e^{-1.095}}{0.003}\approx$ 222 дня.

8.12. $M(\xi,\eta)=1$, $D(\xi,\eta)=\cancel{Q}$ 4/9

8.14. $P_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{x}, \quad x>0,$

$$M\xi=\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}+a\right),\ D\xi=e^{2a}\left(e^{2\sigma^2}-e^{\sigma^2}\right).$$

8.15. Пусть $\zeta_1=\alpha\xi+\beta\eta,\ \zeta_2=\alpha\xi-\beta\eta,\ D\zeta_1=D\zeta_2=$

$=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,\quad \rho(\zeta_1,\zeta_2)=\alpha^2-\beta^2,$

$$P_{\zeta_1\zeta_2}(x,y) = \left(2\pi\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)(1-\rho^2)\right)^{-1}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x-(\alpha+\beta)a)^2-2\rho(x-(\alpha+\beta)a)(y-(\alpha-\beta)a)+(y-(\alpha-\beta)a)^2}{2\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)(1-\rho^2)}\right\}$$

8.16. $cov(\xi,\xi^k)=\begin{cases}0, & k=0,\\ 1, & k=1,\\ 0, & k>1.\end{cases}$ 8.17. $\mathcal{D}\zeta$.

8.18. $r=-n/100$.

8.20. $M\left(\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\right)=aM\nu,\ \mathcal{D}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i\right)=a^2\mathcal{D}\nu+bM\nu.$

8.21. $M\chi^2_{n+\nu}=n+mp,\ \mathcal{D}\chi^2_{n+\nu}=mp(3-p).$

8.22. $M\sigma^2\chi^2_{n,\delta}=\sigma^2(n+\delta^2),\ \mathcal{D}\sigma^2\chi^2_{n,\delta}=2\sigma^4(n+2\delta^2).$

8.23. $\sigma^2\chi^2_{n_1,\delta_1}+\sigma^2\chi^2_{n_2,\delta_2}=\sigma^2\chi^2_{n_1+n_2,\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}}.$

8.24. $\overline{m}=\overline{k}p,\ \mathcal{D}m=p^2\mathcal{D}k+\overline{k}p(1-p).$

8.25. $\overline{\nu}_a=p\overline{\nu},\ \overline{\nu}_c=(1-p)\overline{\nu},\ \mathcal{D}\nu_a=\overline{\nu}_a+p^2(\sigma^2-\overline{\nu}),$

$\mathcal{D}\nu_c=(1-p)^2\sigma^2+\overline{\nu}p(1-p),\ cov(\nu_a,\nu_c)=(\sigma^2-\overline{\nu})p(1-p).$

8.26. $\overline{n}_б=(1-\alpha)\overline{n},\ \overline{n}_к=\alpha\overline{n},\ \mathcal{D}n_к=\alpha^2\sigma^2+\overline{n}\alpha(1-\alpha),$

$\mathcal{D}n_б=(1-\alpha)^2\sigma^2+\overline{n}\alpha(1-\alpha),\ cov(n_б,n_к)=(\sigma^2-\overline{n})\alpha(1-\alpha).$

8.28. Искомая линейная комбинация $\hat{c}_1+\hat{c}_2\xi_2$ есть
$a_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\xi_2-a_2).$

8.29. Воспользоваться неравенством Коши – Буняковского.
$\overline{\xi}=\frac{\exp(-E/kT)}{1-\exp(-E/kT)},\ \mathcal{D}\xi=\frac{\overline{\xi}}{1-\exp(-E/kT)}.$

8.34. Воспользоваться представлением $\mu_0(n,N)=\theta_1+\dots+\theta_N$, где $\theta_i=1$, если ящик остался пустым, и $\theta_i=0$ в противном случае $M\mu_0(n,N)=N(1-\frac{1}{N})^n$,
$\mathcal{D}\mu_0(n,N)=N(N-1)(1-\frac{2}{N})^n+N(1-\frac{1}{N})^n-N^2(1-\frac{1}{N})^{2n}.$

8.35. $P(n(T)=r)=\int_0^\infty e^{-\beta xT}\frac{(\beta xT)^r}{r!}\omega_I(x)dx,\ r\geqslant 0,$

$$P(n(T)=r)=\frac{(\beta T\sigma^2)}{(1+\beta T\sigma^2)^{1+r}},\ r\geqslant 0,$$

$$\overline{n(T)}=\beta T\sigma^2;\ \mathcal{D}n(T)=\frac{\overline{n(T)}}{1+\overline{n(T)}}.$$

8.36. а) $(1-p)^k$, б) $P(\nu=k)=p(1-p)^{k-1}$; $k\geqslant 1$, в) $(1-p)^k$,

г) $\overline{\nu}=(1-p)/p$, д) $\mathcal{D}\nu=(1-p)/p^2$.

8.37. а) $1+np$, б) $1+\lambda$ в) $1/p$, г) $1+n_1l/n$.

8.38. $P(l\geqslant x)=\exp(-\mu x),\ \mu>0$ вероятность прохождения фотоном расстояния x (вещество – непрерывное).

8.39. $P_\Sigma(l\geqslant x)=\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\sigma_k(E)n_kx\right)$:

в показателе экспоненты складываются линейные коэффициенты поглощения $\mu_k=\sigma_k(E)\cdot n_k$.

9.3. Воспользоваться неравенством Чебышева.

9.4. а) нет; б) да; в) нет.

9.5. В условиях теоремы Бернулли $n\approx 12500$, в условиях центральной предельной теоремы $n\approx 2500$.

9.6. Рассчитать $M\xi$ и $M\xi^2$. Воспользоваться неравенством Чебышева.

9.7. Оценить сверху $\mathcal{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)$ и воспользоваться неравенством Чебышева.

10.1. а) $\frac{\sin ta}{ta}$; б) $(1+p(e^{it}-1))^n$; в) $e^{\lambda(e^{it}-1)}$;

г) $e^{-|t|}$; д) $\frac{a^2}{a^2+t^2}$; е) $e^{ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$.

10.2. $P(\xi=k)=C^k_{n+k-1}p^nq^k=C^k_{-n}p^n(-q)^k$,

$q=1-p,\ k=0,1,2,\dots,\ f_\xi(t)=p^n(1-qe^{it})^{-n},\ M\xi=$
$=n\frac{q}{p},\ \mathcal{D}\xi=n\frac{q}{p}(1+\frac{q}{p}).$

10.4. Использовать свойства характеристических функций и неравенство б) из задачи 10.3.

10.5. Исследовать сходимость характеристических функций $f_{\zeta_n}(t)$ при $n \to \infty$ к $\exp(-t^2/2)$, где $\zeta_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \Big/ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D\xi_k}$.

а) нет; б) нет; в) нет.

10.7. Более 210 бросаний с вероятностью 0.0735. Менее 180 бросаний с вероятностью 0.0019. От 190 до 210 бросаний с вероятностью 0.853.

10.8. $p_\xi(x) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi 600}} \exp\left(-0.5 \dfrac{(x-200)^2}{600}\right).$

11.1. а) число состояний равно 4-м;

б) из второго состояния можно перейти в третье за 2 шага;

$$\text{в) } P_2 = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{24} & \frac{11}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

11.2. $P_1 = \|p_{ij}\|$, здесь $p_{ij} = \begin{cases} 0, & j < i-1, \\ p, & j = i-1, \\ q, & j = i, \\ r, & j = i+1, \\ 0, & j > i+1, \end{cases}$ $P_2 = \|p_{ij}^{(2)}\|$, где

$$p_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, & j < i-2, \\ p^2, & j = i-2, \\ 2pq, & j = i-1, \\ q^2+2pr, & j = i, \\ 2rq, & j = i+1, \\ r^2, & j = i+2, \\ 0, & j > i+2. \end{cases}$$

11.3. а) $\sum_{k=1}^{\infty} C_i C_k \exp\{-\alpha|i-k| - \alpha|k-j|\}$;

б) $C_i = \dfrac{1-e^{\alpha}}{1+e^{-\alpha}-e^{-\alpha i}}$.

11.4. $P_1(n) = \alpha p_{11}^{(n)} + \beta p_{21}^{(n)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(\alpha-\beta)(p-q)^n}{2}$,

$P_2(n) = \alpha p_{11}^{(n)} + \beta p_{22}^{(n)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(\alpha-\beta)(p-q)^n}{2}$, $P_1 = P_2 = \dfrac{1}{2}$.

11.5. Пусть $|m| \le n$, тогда

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad m \geq 0,$$

$$P_n(k) = C_n^k p^{n-k} q^k, \quad m \leq 0, \qquad k = \frac{n+|m|}{2}.$$

11.6.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad p_k = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

11.7. Покажите, что уравнение Маркова не выполнено (например, при переходе через 2 шага): $\pi_2 \neq \pi_1 \times \pi_1$.

11.8. При $p = 1/2$ будет, а при $p \neq 1/2$ не будет.

$$\lim_{n \to \infty} P\{\zeta_n = 1\} = p^2 + q^2.$$

12.4. Выделить полные группы попарно несовместимых событий, воспользоваться решением задачи 3.22 и использовать свойство вероятности неизлучения от расположения временного промежутка на оси времени.

$$P(M_1(t) = r_1, \ldots, M_n(t) = r_n) = C_{M_0}^{r_1, \ldots, r_n} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(a_j (1 - e^{-\lambda t})\right)^{r_j} \times$$

$$\times (e^{-\lambda t})^{M_0 - \sum_{j=1}^{n} r_j}, \quad 0 \leq r_j \leq M_0, \; 0 \leq \sum_{j=1}^{n} r_j \leq M_0,$$

где

$$C_{M_0}^{r_1, \ldots, r_n} = \frac{M_0!}{r_1! \ldots r_n! \left(M_0 - \sum_{j=1}^{n} r_j\right)!},$$

$$P(M(t) = r) = C_{M_0}^{r} (1 - e^{-\lambda t})^r \cdot (e^{-\lambda t})^{M_0 - r}, \quad 0 \leq r \leq M_0.$$

12.6. $f_{M(t)}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \overline{\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \theta_j M_j(t)\right)} =$

$$= \sum_{r_1=0}^{M_0} \cdots \sum_{r_n=0}^{M_0 - r_1 - \ldots - r_{n-1}} \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \theta_j r_j\right) \cdot C_{M_0}^{r_1, \ldots, r_n} \prod_{j=1}^{n} \left(a_j (1 - e^{-\lambda t})\right)^{r_j} \times$$

$$\times (e^{-\lambda t})^{M_0 - \sum_{j=1}^{n} r_j} = \left(1 + (1 - e^{-\lambda t})\left(\sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j} a_j - 1\right)\right)^{M_0},$$

$$-\infty < \theta_1, \ldots, \theta_n < +\infty,$$

$$f_{M(t)}(\theta)=\overline{\exp(i\theta M(t))}=(1+(1-e^{-\lambda t})(e^{i\theta}-1))^{M_0},$$

$-\infty<\theta<+\infty,$

$$f_{N(t)}(\theta_1,\dots,\theta_n)=\exp\Big(qt\Big(\sum_{j=1}^{n}e^{i\theta_j}a_j-1\Big)\Big),$$

$-\infty<\theta_1,\dots,\theta_n<+\infty$

$$f_{N(t)}(\theta)=\exp(qt(e^{i\theta}-1)),\ -\infty<\theta<+\infty.$$

12.7. $\overline{N_j(t)}=DN_j(t)=a_jqt,\quad \dfrac{d\overline{N_j(t)}}{dt}=a_jq,\ j=1,\dots,n.$

12.8. $\overline{M_j(t)}=a_jM_0(1-e^{-\lambda t}),\quad DM_j(t)=a_jM_0(1-e^{-\lambda t})e^{-\lambda t},$

$$\frac{d\overline{M_j(t)}}{dt}=a_jM_0\lambda e^{-\lambda t},\ j=1,\dots,n,\ cov(M_i(t),M_j(t))=$$

$$=-M_0a_ia_j(1-e^{-\lambda t})^2,\ i\neq j,\ i,j=1,\dots,n.$$

12.9. $P(N_1(t)=l_1,\dots,N_n(t)=l_n)=$

$$=\sum_{r_1\geq l_1,\dots,r_n\geq l_n}P(N_1(t)=l_1,\dots,N_n(t)=l_n\,|\,N_1(t)=r_1,\dots,N_n(t)=r_n)\times$$

$$\times P(N_1(t)=r_1,\dots,N_n(t)=r_n)=\sum_{r_1\geq l_1,\dots,r_n\geq l_n}\prod_{j=1}^{n}C_{r_j}^{l_j}p_j^{l_j}(1-p_j)^{r_j-l_j}\times$$

$$\times p(r_1,\dots,r_n,t),\ (l_1,\dots,l_n)\in\mathcal{R},$$

$$P(N(t)=r)=\exp\Big(-qt\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\Big)\frac{\big(qt\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\big)^r}{r!},\ r\geq 0,$$

$$P(M(t)=r)=C_{M_0}^{r}\Big((1-e^{-\lambda t})\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\Big)^r\times$$

$$\times\Big(1-(1-e^{-\lambda t})\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\Big)^{M_0-r},\quad 0\leq r\leq M_0.$$

12.10. $P(N(t)=r)=\exp\Big(-\dfrac{\Omega}{4\pi}\omega qt\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\Big)\dfrac{\big(\frac{\Omega}{4\pi}\omega qt\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\big)^r}{r!},$

$0\leq r<\infty,$

$$P(M(t)=r)=C_{M_0}^{r}\Big(\frac{\Omega}{4\pi}\omega(1-e^{-\lambda t})\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\Big)^r\times$$

$$\times\Big(1-\frac{\Omega}{4\pi}\omega(1-e^{-\lambda t})\sum_{j=1}^{n}p_ja_j\Big)^{M_0-r},\quad 0\leq r\leq M_0.$$

12.12. $p_{\tau_M}(t)=qe^{-qt}\dfrac{(qt)^{M-1}}{(M-1)!},\ t\geq 0,\ \overline{\tau_M}=\dfrac{M}{q}.$

12.13. $P(N_1(t_0)=r)=\Big(\dfrac{q_0}{q_0+q_1}\Big)C_{r+M-1}^{r}\Big(\dfrac{q_1}{q_0+q_1}\Big)^r\Big(\dfrac{q_0}{q_0+q_1}\Big)^{M-1},\ r\geq 0.$

12.14. $\overline{N_1(t_0)}=M\dfrac{q_1}{q_0},\quad DN_1(t_0)=M\dfrac{q_1}{q_0}\Big(1+\dfrac{q_1}{q_0}\Big).$

12.15. $P(\xi_n=r)=C_{-nM}^{r}\Big(\dfrac{q_0}{q_0+q_1}\Big)^{nM}\Big(-\dfrac{q_1}{q_0+q_1}\Big)^r,\ r\geq 0.$

$$\frac{\sqrt{D\xi_n}}{M\xi_n}=\sqrt{\frac{1+\frac{q_1}{q_0}}{nM}}.$$

12.16. Воспользуйтесь неравенством Чебышева

$$P\{|\xi(t)-\xi(t_0)|>\varepsilon\}\leq\frac{M|\xi(t)-\xi(t_0)|^2}{\varepsilon^2},\ \varepsilon>0.$$

12.18. Воспользуйтесь среднеквадратичной дифференцируемостью процесса $\xi(t)$ в точке t и неравенством

$$\Big|M\Big(\xi'(t)-\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\Big)\Big|\leq\Big\{M\Big|\xi'(t)-\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\Big|^2\Big\}^{1/2},$$

которое следует из неравенства Коши – Буняковского.

12.20. $p_{\xi(t)}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{2t}}.$

12.21. $P\{s\leq\tau\}=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\dfrac{\tau}{t}},\ 0<\tau\leq t.$

13.1. $\left.\dfrac{M-(M+Д)p}{\sqrt{(M+Д)p(1-p)}}\right|_{p=0.515}\approx 2.93<3,\ \left.\dfrac{M-(M+Д)p}{\sqrt{(M+Д)p(1-p)}}\right|_{p=0.5}\approx 49>3,$

первая гипотеза не отвергается, вторая гипотеза отвергается согласно критерию 3σ.

I3.2. $\dfrac{\left|\sum_i (x_i^{(1)}-\mu)\right|}{\sqrt{n}\,\sigma} \approx 1.13 < 3$, $\dfrac{\left|\sum_i (x_i^{(2)}-\mu)\right|}{\sqrt{n}\,\sigma} \approx 5.41 > 3$;

первая партия проволоки - требуемого качества, вторая партия - нет, согласно критерию 3σ.

I3.3. I0 листов.

I3.4. $$t_{n_0+n_i-2}(x_0,x_i)=\frac{x_0-x_i}{\sqrt{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_i}}}\Bigg/\left\{\frac{(n_0-1)\sigma_0^2+(n_i-1)\sigma_i^2}{n_0+n_i-2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|t_{n_0+n_1-2}(x_0,x_1)|\approx 3.92>3.291,\ |t_{n_0+n_2-2}(x_0,x_2)|\approx$$

$$\approx 1.09<3.291,\ \ |t_{n_0+n_3-2}(x_0,x_3)|\approx 2.35<3.291.$$

Разница в длине размеров яиц кукушки от птиц I-го вида не носит случайный характер, а от птиц 2-го и 3-го видов - носит случайный характер, согласно критерию Стьюдента с уровнем значимости α = 0.1%.

I3.5. Статистика $t_4 \approx$ 2.4 не попадает в критическое множество $\mathcal{K}_{0.05}$. С уровнем значимости 5% гипотеза о том, что бетон обеих групп одинаково прочен, не отвергается.

I3.6. Статистика $t_{15} \approx$ I.77 не попадает в критическое множество $\mathcal{K}_{0.05}$. С уровнем значимости 5% гипотеза о том, что оба метода не дают систематического различия при измерении содержания крахмала, не отвергается.

I3.7. а) Статистика $t_9 \approx$ 3.2 попадает в критическое множество $\mathcal{K}_{0.05}$, гипотеза о том, что применение специальной сеялки не увеличивает урожай, отвергается.

б) Статистика $t_{18} \approx$ I.88 не попадает в критическое множество $\mathcal{K}_{0.05}$, гипотеза о том, что применение специальной сеялки не увеличивает урожай, не отвергается. Тест, основанный на второй статистике, хуже, т.к. каждой выборке соответствует значительная дисперсия и это не позволяет различить среднее выборок.

I3.8. Статистика $t_9 \approx$ -2.486 попадает в критическое множество $\mathcal{K}_{0.05}$ и не попадает в критическое множество $\mathcal{K}_{0.02}$. Таким образом, гипотеза с уровнем значимости 5% отвергается и с уровнем значимости 2% - не отвергается.

I3.9. Статистика $\chi_4^2 \approx 1.05 \,\bar{\in}\, \mathcal{K}_{0.05}$ не противоречит

гипотезе.

I3.I0. Статистика $\chi_{11}^2 \approx 260$ попадает в критическое множество $\mathcal{K}_{0.001}$, гипотеза отвергается.

I3.II. $\mathcal{K}_\alpha = (-\infty,1)\cup(-x_k,x_k)\cup(1,\infty)$, где $x_k = 0.05$, мощность β = 0.874.

I3.I2. При $\sigma_0^2 > \sigma_1^2$ имеем $\mathcal{K}_\alpha = \{\sum x_i^2 < b_\alpha\}$, при $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$ имеем $\mathcal{K}_\alpha = \{\sum x_i^2 > a_\alpha\}$, где a_α и b_α - константы, зависящие от уровня значимости α.

I3.I3. $n \geqslant 9$.

I4.I. С вероятностью 0.95 μ принадлежит интервалу
(6.47-0.08, 6.47+0.08).

I4.2. а) вероятность того, что абсолютная ошибка μ не превышает 5 равна 0.999;

б) вероятность того, что абсолютная ошибка σ^2 не превышает I, равна 0.24.

I4.3. С вероятностью 0.9 σ^2 принадлежит интервалу
(0.003, 0.02).

I4.4. а) С вероятностью 0.9 μ принадлежит интервалу
(5 - 0.28, 5 + 0.28);

б) с вероятностью 0.9 σ^2 принадлежит интервалу
(I.I, 2.2).

I5.I. $\tilde{p} = x/n$.

I5.2. Оценка наибольшего правдоподобия $\tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$, k_i - выборочные значения, n - объем выборки.

I5.3. $\tilde{\mu} = \dfrac{\sum x_i/\sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2}$, $D\tilde{\mu} = \dfrac{1}{\sum 1/\sigma_i^2}$.

I5.4. $\tilde{\mu} = 3.53$, $\tilde{\sigma}^2 = 0.34$.

I5.8. $\tilde{a} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$.

I5.9. Воспользуйтесь решением задачи I2.II.

I6.I. Дисперсия оценок $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$ в первой, во второй и в третьей стратегиях, соответственно, равны σ^2, $\frac{2}{3}\sigma^2$ и $\frac{\sigma^2}{2}$. Третья стратегия предпочтительней.

I6.2. Измерить сумму и разность двух стержней.

I6.3. $h_0 \approx 93 \pm 41$, $\hat{v} \approx 10 \pm 29$, $\frac{\hat{a}}{2} \approx -4 \pm 3.9$.

I6.4. $\hat{a} = 3.23$, $\hat{b} = 1.048$, $\hat{\sigma}^2 \approx 0.009$.

I6.5. $a \in \left(3.23 - 1.28\frac{\sigma}{2};\ 3.23 + 1.28\frac{\sigma}{2}\right)$,

$$b \in \left(1.048 - 1.28\frac{\sigma}{\sqrt{20}};\ 1.048 + 1.28\frac{\sigma}{\sqrt{20}}\right),$$

$$\sigma^2 \in (0.0024; 0.35),\ \left(\frac{a-3.23}{0.29}\right)^2 + \left(\frac{b-1.048}{0.13}\right)^2 \le \sigma^2.$$

I6.6. $\hat{\gamma} = \sum_{\lambda=1}^{K} c_\lambda \hat{\alpha}_\lambda$, $D\hat{\gamma} = \sigma^2 \sum_{\lambda=1}^{K}\sum_{\lambda'=1}^{K} c_\lambda c_{\lambda'} (a_\lambda, a_{\lambda'})^-$,

где $\hat{\alpha}$ Н.О.М.Д. оценка в условиях теоремы Гаусса – Маркова.

I6.7. $\hat{S}_0 = 12.834$, $\hat{v} = 0.34$.

Функция нормального распределения $\Phi(t) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{t} \exp(-0.5x^2)\,dx$ Таблица I

t	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.480I	0.476I	0.472I	0.468I	0.464I
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.2	.4207	.4I68	.4I29	.4090	.4052	.40I3	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.3	.382I	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3I92	.3I56	.3I2I
−0.5	.3085	.3050	.30I5	.298I	.2946	.29I2	.2877	.2843	.28I0	.2776
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.26II	.2578	.2546	.25I4	.2483	.245I
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2I77	.2I48
−0.8	.2II9	.2090	.206I	.2033	.2005	.I977	.I949	.I922	.I894	.I867
−0.9	.I84I	.I8I4	.I788	.I762	.I736	.I7II	.I685	.I660	.I635	.I6II
−I.0	.I587	.I562	.I539	.I5I5	.I492	.I469	.I446	.I423	.I40I	.I379
−I.I	.I357	.I335	.I3I4	.I292	.I27I	.I25I	.I230	.I2I0	.II90	.II70
−I.2	.II5I	.II3I	.III2	.I093	.I075	.I056	.I038	.I020	.I003	.0985
−I.3	.0968	.095I	.0934	.09I8	.090I	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−I.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.072I	.0708	.0694	.068I
−I.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.06I8	.0606	.0594	.0582	.057I	.0559
−I.6	.0548	.0537	.0526	.05I6	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−I.7	.0446	.0436	.0427	.04I8	.0409	.040I	.0392	.0384	.0375	.0367
−I.8	.0359	.035I	.0344	.0336	.0329	.0322	.03I4	.0307	.030I	.0294
−I.9	.0288	.028I	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−2.0	.0228	.0222	.02I7	.02I2	.0207	.0202	.0I97	.0I92	.0I88	.0I83

Окончание табл.I

t	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
-2.I	0.0I79	0.0I74	0.0I70	0.0I66	0.0I62	0.0I58	0.0I54	0.0I50	0.0I46	0.0I43
-2.2	.0I39	.0I36	.0I32	.0I29	.0I25	.0I22	.0II9	.0II6	.0II3	.0II0
-2.3	.0I07	.0I04	.0I02	.0099	.0096	.0094	.009I	.0089	.0087	.0084
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.007I	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.005I	.0049	.0048
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.004I	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.003I	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.002I	.002I	.0020	.00I9
-2.9	.00I9	.00I8	.00I8	.00I7	.00I6	.00I6	.00I5			

t =	-3.0	-3.I	-3.2	-3.3	-3.4	-3.5	-3.6	-3.7	-3.8	-3.9
$\Phi(t)$ =	0.00I3	0.00I0	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.000I	0.000I	0.0000

Распределение Стьюдента. Доверительные границы для t с n степенями свободы

Таблица 2

$n\downarrow$	Двусторонние границы 5%	2%	I%	0.I%	$n\downarrow$	Двусторонние границы 5%	2%	I%	0.I%
I	I2.7I0	3I.820	63.660	636.600	20	2.086	2.528	2.845	3.850
2	4.303	6.965	9.925	3I.600	2I	2.080	2.5I8	2.83I	3.8I9
3	3.I82	4.54I	5.84I	I2.920	22	2.074	2.508	2.8I9	3.792
4	2.776	3.747	4.604	8.6I0	23	2.069	2.500	2.807	3.767
5	2.57I	3.365	4.032	8.869	24	2.064	2.492	2.797	3.745
6	2.447	3.I43	3.707	5.959	25	2.060	2.485	2.787	3.725
7	2.365	2.998	3.499	5.408	26	2.056	2.479	2.779	3.707
8	2.306	2.896	3.355	5.04I	27	2.052	2.473	2.77I	3.690
9	2.262	2.82I	3.250	4.78I	28	2.048	2.467	2.763	3.674
I0	2.228	2.764	3.I69	4.587	29	2.045	2.462	2.756	3.659
II	2.20I	2.7I8	3.I06	4.437	30	2.042	2.457	2.750	3.646
I2	2.I79	2.68I	3.055	4.3I8	40	2.02I	2.423	2.704	3.55I
I3	2.I60	2.650	3.0I2	4.22I	50	2.009	2.403	2.678	3.495
I4	2.I45	2.624	2.977	4.I40	60	2.000	2.390	2.660	3.460
I5	2.I3I	2.602	2.947	4.073	80	I.990	2.374	2.639	3.4I5
I6	2.I20	2.583	2.92I	4.0I5	I00	I.984	2.365	2.626	3.389
I7	2.II0	2.567	2.898	3.965	200	I.972	2.345	2.60I	3.339
I8	2.I0I	2.552	2.878	3.922	500	I.965	2.334	2.586	3.3I0
I9	2.093	2.539	2.86I	3.883	∞	I.960	2.326	2.576	3.29I
n :	2.5%	I%	0.5%	0.05%	n :	2.5%	I%	0.5%	0.05%
	Односторонние границы					Односторонние границы			

Распределение Пуассона. Функция $\sum_{k=x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Таблица 3

x	λ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000
I	.095I63	.I8I269	.259I82	.329680	.393469
2	.004679	.0I7523	.036936	.06I552	.090204
3	.000I55	.00II49	.003600	.007926	.0I4388
4		.000057	.000266	.000776	.00I752
5					.000I72

x	λ = 0.6	0.7	0.8	0.9	I.0
0	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000
I	.45II88	.5034I5	.55067I	.593430	.632I2I
2	.I2I90I	.I55805	.I9I208	.2275I8	.26424I
3	.023I55	.034I42	.047423	.062857	.08030I
4	.003358	.005753	.009080	.0I3459	.0I8988
5	.000394	.000786	.00I4II	.002344	.003660
6			.000I84	.000343	.000594

Продолжение табл.3

x	λ = I.2	I.4	I.6	I.8	2.0
0	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000
I	.698806	.753403	.798I03	.83470I	.864665
2	.337373	.408I67	.475069	.537I63	.593994
3	.I205I3	.I66502	.2I6642	.269379	.323324
4	.033769	.053725	.0788I3	.I08708	.I42877
5	.007746	.0I4253	.023682	.036407	.052653
6	.00I500	.00320I	.006040	.0I0378	.0I6564
7	.00025I	.000622	.00I336	.002569	.004534
8			.000260	.000562	.00I097
9					.000237

x	λ = 2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	4.0
0	I.000000	I.00000	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000
I	.889I97	.909282	.925726	.939I90	.9502I3	.98I684
2	.645430	.69I559	.7326I5	.768922	.800852	.908422
3	.377286	.43029I	.48I570	.530546	.5768I0	.76I897
4	.I80648	.22I227	.263998	.308063	.352768	.566530
5	.072496	.085869	.I22577	.I52324	.I84737	.37II63

Продолжение табл.3

α :	λ 2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	4.0
6	I.024910	I.035673	I.049037	I.065II0	I.0839I8	I.2I4870
7	.00746I	.0II594	.0I7I70	.0244II	.033509	.II0674
8	.00I978	.003339	.005334	.008I3I	.0II905	.05II34
9	.000470	.000862	.00I487	.002433	.003803	.02I363
I0			0.000376	0.000660	0.00II02	0.008I32
II					.000292	.002840
I2						.0009I5

α :	λ 5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	I0.0
0	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000	I.000000
I	.993262	.99752I	.999088	.999665	.999877	.999955
2	.959572	.982649	.922705	.99698I	.998766	.99950I
3	.875348	.93803I	.970364	.986246	.993768	.99723I
4	.734974	.848796	.9I8235	.957620	.978774	.989664
5	.559507	.7I4943	.827008	.900368	.945036	.970747
6	.384039	.554320	.299292	.808764	.884309	.9329I4
7	.2378I7	.393697	.550289	.686626	.7932I9	.869859
8	.I33372	.256020	.40I266	.547039	.676I03	.779779
9	.068094	.I52763	.270909	.407453	.544347	.667I80

Окончание табл.3

α :	λ 5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	I0.0
I0	I.03I828	I.083924	I.I69504	I.283376	I.4I2592	I.542070
II	.0I3695	.04262I	.09852I	.I84II4	.2940I2	.4I6960
I2	.005453	.020092	.053350	.III924	.I96662	.303924
I3	.0020I9	.008827	.027000	.063797	.I24227	.208444
I4	.000698	.003628	.0I28II	.034I8I	.07385I	.I35536
I5		.00I400	.0057I7	.0I7257	.04I466	.083459
I6		.000509	.002407	.00823I	.022036	.048740
I7			.000958	.0037I8	.0III06	.027042
I8				.00I594	.005320	.0I4278
I9				.000650	.002426	.007I87
20					.00I056	.003454
2I					.000439	.00I588
22						.000700

Распределение Пирсона хи-квадрат

Таблица 4

Значения $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, n)$ в $P\{\chi_n^2 > \varepsilon\} = 1 - \alpha$

$n \backslash \alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.20
I	0.000I6	0.00063	0.00393	0.0I58	0.0642	I.642
2	0.020I	0.0404	0.I03	0.2II	0.446	3.2I9
3	0.II5	0.I85	0.352	0.584	I.005	4.642
4	0.297	0.429	0.7II	I.064	I.649	5.989
5	0.554	0.752	I.I45	I.6I0	2.343	7.289
6	0.872	I.I34	I.635	2.204	3.070	8.558
7	I.239	I.564	2.I67	2.833	3.822	9.803
8	I.646	2.032	2.733	3.490	4.594	II.030
9	2.088	2.532	3.325	4.I68	5.380	I2.242
I0	2.558	3.059	3.940	4.865	6.I79	I3.442
II	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	I4.63I
I2	3.57I	4.I78	5.226	6.304	7.807	I5.8I2
I3	4.I07	4.765	5.892	7.042	8.634	I6.985
I4	4.660	5.368	6.57I	7.790	9.467	I8.I5I
I5	5.229	5.985	7.262	8.547	I0.307	I9.3II
I6	5.8I2	6.6I4	7.962	9.3I2	II.I52	20.465
I7	6.408	7.255	8.672	I0.085	I2.002	2I.6I5
I8	7.0I5	7.906	9.390	I0.865	I2.857	22.760
I9	7.633	8.567	I0.II7	II.65I	I3.7I6	23.900

Продолжение табл.4

$n \backslash \alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.20
20	8.260	9.237	I0.85I	I2.443	I4.578	25.038
2I	8.897	9.9I5	II.59I	I3.240	I5.445	26.I7I
22	9.542	I0.600	I2.338	I4.04I	I6.3I4	27.30I
23	I0.I96	II.293	I3.09I	I4.848	I7.I87	28.429
24	I0.856	II.292	I3.848	I5.659	I8.062	29.553
25	II.524	I2.697	I4.6II	I6.473	I8.940	30.675
26	I2.I98	I3.409	I5.379	I7.292	I9.820	3I.795
27	I2.879	I4.I25	I6.I5I	I8.II4	20.703	3I.9I2
28	I3.565	I4.847	I6.928	I8.939	2I.588	34.027
29	I4.256	I5.574	I7.708	I9.768	22.475	35.I39
30	I4.953	I6.306	I8.493	20.599	23.364	36.250

$n \backslash \alpha$	0.I0	0.05	0.02	0.0I	0.00I	$n \backslash \alpha$	0.I0	0.05	0.02	0.0I	0.00I
I	2.706	3.84I	5.4I2	6.635	I0.827	7	I2.0I7	I4.067	I6.622	I8.475	24.322
2	4.605	5.99I	7.824	9.2I0	I3.8I5	8	I3.362	I5.507	I8.I68	20.090	26.I25
3	6.25I	7.8I5	9.837	II.34I	I6.268	9	I4.684	I6.9I9	I9.679	2I.666	27.877
4	7.779	9.488	II.668	I3.277	I8.465	I0	I5.987	I8.307	2I.I6I	23.209	29.588
5	9.236	II.070	I3.388	I5.086	20.5I7	II	I7.275	I9.675	22.6I8	24.725	3I.264
6	I0.645	I2.592	I5.033	I6.8I2	22.457	I2	I8.549	2I.026	24.054	26.2I7	32.909

Окончание табл.4

n \ α	0.10	0.05	0.02	0.0I	0.00I	n \ α	0.I0	0.05	0.02	0.0I	0.00I
I3	I9.8I2	22.362	25.472	27.688	34.528	22	30.8I3	33.924	37.659	40.289	48.268
I4	2I.064	23.685	26.873	29.I4I	36.I23	23	32.007	35.I72	38.968	4I.638	49.728
I5	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697	24	33.I96	36.4I5	40.270	42.980	5I.I79
I6	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252	25	34.382	37.652	4I.566	44.3I4	52.620
I7	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790	26	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
I8	25.989	28.869	32.346	34.805	42.3I2	27	36.74I	40.II3	44.I40	46.963	55.476
I9	27.204	30.I44	33.687	36.I9I	43.820	28	37.9I6	4I.337	45.4I9	48.278	56.893
20	28.4I2	3I.4I0	35.020	37.566	45.3I5	29	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
2I	29.6I5	32.67I	36.343	38.932	46.797	30	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703

Оглавление